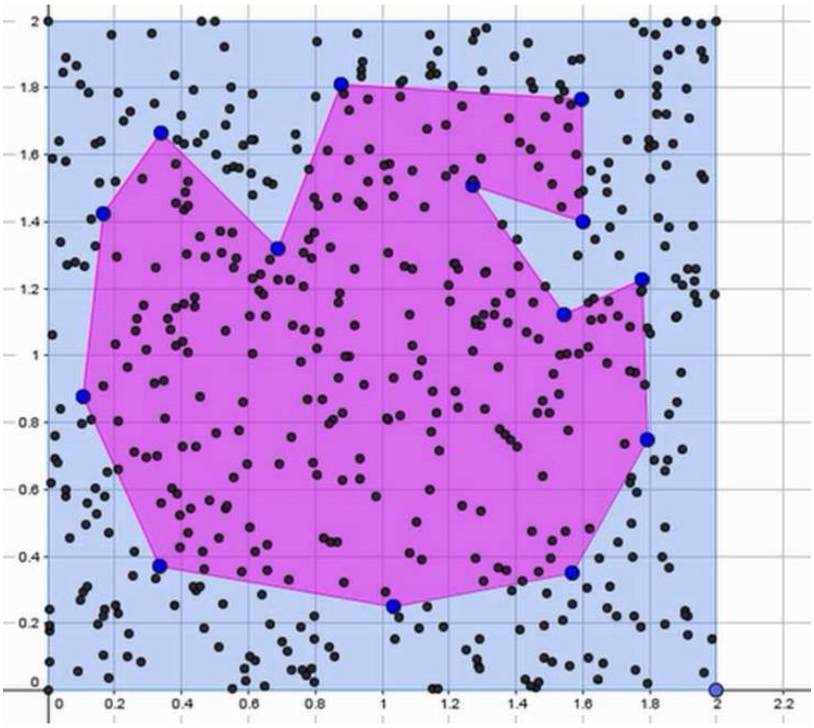
INFORME

Proyecto de "La Máquina de áreasRARAS"

Modalidad: 3º- 4º ESO

Autores: **Oscar Cabrera García, Carla García Pérez y Ainhoa Pérez López**

Coordina: Sergio Darias Beautell



RESUMEN

Este es un proyecto realizado por alumnado de 3ºESO (Carla, Ainhoa y Oscar) del IES Realejos. En este, a través de una investigación de campo, y utilizando herramientas de tipo tecnológico (GeoGebra) y de tipo teórico-matemático (Probabilidad Geométrica y Ley de los Grandes Números) se intenta fabricar una "máquina" que calcule, o por lo menos aproxime, el área de formas irregulares "RARAS" de las cuales desconocemos su fórmula. Siguiendo una metodología propia del método científico partimos de una intuición que posteriormente comprobamos a través de la experimentación y que finalmente aplicamos a la naturaleza en tres ámbitos: Hojas de árboles endémicos, orgánulos de células animales y las últimas grandes inundaciones en Pakistán que dejaron casi 2000 muertes. Además, hemos elaborado una infografía, un cómic y varios vídeos que nos ayudan a explicar los conceptos aplicados y también a difundir nuestra investigación en medios sociales.

JUSTIFICACIÓN

Cálculo de área de figuras de las que NO tenemos fórmula, de áreas RARAS.

En este proyecto intentaremos relacionar la probabilidad, la proporcionalidad y la geometría, que normalmente hemos visto por separado, para contestar una pregunta: **¿Cómo podemos calcular el área de superficies de las que no tenemos fórmula?** Área de superficies irregulares o RARAS ¿Se puede hacer esto con las herramientas matemáticas que conocemos en la ESO? El profe dice que con las integrales podríamos hacer algo pero que no está a nuestro alcance. Por lo visto Galileo Galilei hace más de cuatro siglos calculó, o más bien estimó, el área de una hoja recortando un cuadrado, del cual conocemos su fórmula, y después de pesar la hoja completa utilizó su proporción para estimar el área. ¿Podremos hacer algo parecido? Realmente en el mundo que nos rodea hay pocas formas en las que podamos utilizar las fórmulas que hemos estudiado hasta ahora, la mayoría son irregulares, es decir, casi nada se adapta a una fórmula perfecta, desde la superficie de pinar de la isla, manchas de petróleo en el océano, las inundaciones, las zonas tumorales u orgánulos de las células. Entonces... ¿Por qué no construir una "máquina" que estime áreas RARAS? Realmente sería útil y a pesar de que no tenemos la inteligencia de Galileo, quizás podamos utilizar nuestra tecnología, hablamos de la última pata en la que se sostiene nuestro proyecto: **Geogebra**.

GeoGebra
Software Dinámico de Matemáticas

Esta herramienta nos permitirá, en poco tiempo, hacer un modelo de simulaciones aleatorias que conjuntamente con la definición de Probabilidad Geométrica y la Ley de los Grandes Números formará nuestra **Máquina de áreasRARAS**.

OBJETIVOS

El *objetivo general* del trabajo es encontrar el procedimiento para calcular el área de figuras irregulares que se encuentren en nuestro entorno. Si lo conseguimos, nuestro siguiente propósito sería difundirlo a través de charlas a otros cursos de nuestro centro, centros cercanos y por supuesto en Internet.

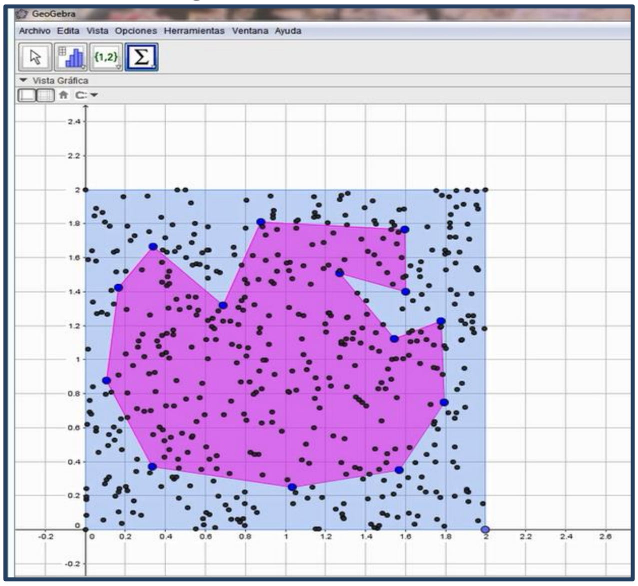
Nuestro *objetivo particular* es ser capaces de interrelacionar las herramientas y conceptos matemáticos ya conocidos para generar algo nuevo y también adquirir destrezas tecnológicas que nos ayuden en futuros estudios y proyectos.

Herramientas para investigar y herramientas para difundir

DESARROLLO DE LA EXPERIENCIA

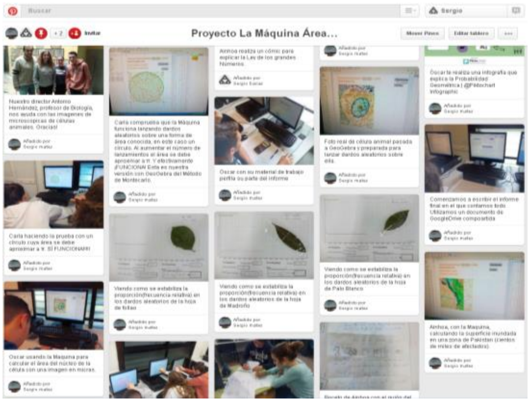
Fase inicial:

Todo comenzó con una reunión informal en la que planteamos la hipótesis. Sabemos que GeoGebra tiene una hoja de cálculo incorporada y podemos encontrar puntos aleatorios en su zona gráfica. Construimos un cuadrado de área 4 unidades cuadradas en GeoGebra y dentro pusimos un polígono irregular. Definimos pares coordenados aleatorios que llamamos lanzamientos de dardos (más adelante Carla explicará mejor el proceso). Después de realizar 500 lanzamientos nos preguntamos: ¿La proporción de dardos que cae dentro de la figura respecto al total de dardos lanzados tendrá alguna relación con el área? La intuición nos decía que sí pero habría que demostrarlo y ver bajo qué condiciones, cuántos lanzamientos eran necesarios, etc. En ese momento fuimos conducidos hacia dos resultados matemáticos que nos podrían ayudar: La definición de Probabilidad Geométrica y la Ley de los Grandes Números, era el momento de ponernos a buscar información y estudiar un poquito con la brújula apuntando a nuestro objetivo final.



En esta fase inicial era importante organizarnos bien con toda la información que teníamos que manejar, así que decidimos trabajar en una carpeta compartida de **Google Drive** e ir documentando gráficamente todo en un tablero de la red social **Pinterest** que se puede visitar en el siguiente enlace:

https://es.pinterest.com/sergiovmates/proyecto-la-m%C3%A1quina-%C3%A1reasraras/



Fase teórica:

En esta fase hubo un reparto de tareas:

Reparto de tareas	Experto en...	Herramienta de difusión
OSCAR	Probabilidad Geométrica	INFOGRAFÍA
AINHOA	Ley Grandes Números	CÓMIC
CARLA	GeoGebra	VÍDEO

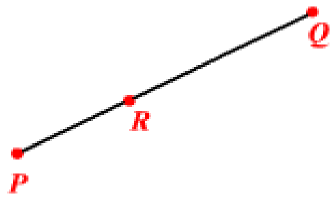
Oscar se dedicaría a buscar información sobre la Probabilidad Geométrica para más tarde explicar a las compañeras en qué consistía. Decidimos que una **infografía** con el software Piktochart podría tener un doble objetivo: explicar el concepto y facilitar su posterior difusión en la red.

https://magic.piktochart.com/output/12784928-probabilidad-geometrica

Oscar nos cuenta ¿Qué es la Probabilidad Geométrica?

Para poder hacernos una idea de lo que hemos hecho en el trabajo necesitamos saber, con antelación, qué es la probabilidad geométrica. Fue un naturalista francés, Buffon (1707-1788), uno de los primeros en trabajar este concepto. Lo explicaremos de forma más clara con el siguiente ejemplo:

Supongamos que se nos presenta la siguiente recta, y un punto, X, es escogido al azar. Además, deseamos que el punto esté en el segmento PR. Aquí se nos plantea la siguiente cuestión: ¿Cuál es la probabilidad de que el punto X esté en el segmento PR?



Pues esta proporción, se halla de la siguiente forma: dividiendo la longitud del segmento PR, entre la longitud del segmento PQ.

Para afianzar más el concepto de probabilidad geométrica, utilizamos un software divulgativo llamado Piktochart, el cual nos permite crear nuestras propias infografías, y, de esta forma, conseguir explicar de manera más gráfica el concepto de probabilidad geométrica. El hecho de crear la infografía en sí, nos resultó bastante sencillo, ya que desde el primer día ya teníamos claro el enfoque que deseábamos darle. Primero, comenzamos haciendo un pequeño boceto de la infografía en un folio en sucio, para así tener una idea general de lo que deseábamos hacer finalmente. Una vez teníamos esta idea sólo quedaba ponernos a trabajar utilizando esta aplicación, que a pesar de ser desconocida para nosotros, la encontramos bastante completa y de lo más sencilla de usar.

"Los problemas de probabilidades geométricas han estado en cierta medida menospreciados ...en la Ciencia."

Procopio Zoroa Terol

Piktochart
make information beautiful


PROBABILIDAD GEOMéTRICA
Si tiramos dardos aleatorios
sobre una diana con premio
como esta...
¿Qué probabilidad
tenemos de ganar
el coche?
¿Cuál es el área de estas zonas?
Áreas
A1
ATotal
la Probabilidad de ganar el coche será
la proporción entre estas áreas
P( ) = =
A1
ATotal
Oscar Cabrera
Carla García
Ainhoa Pérez
IES Realejos

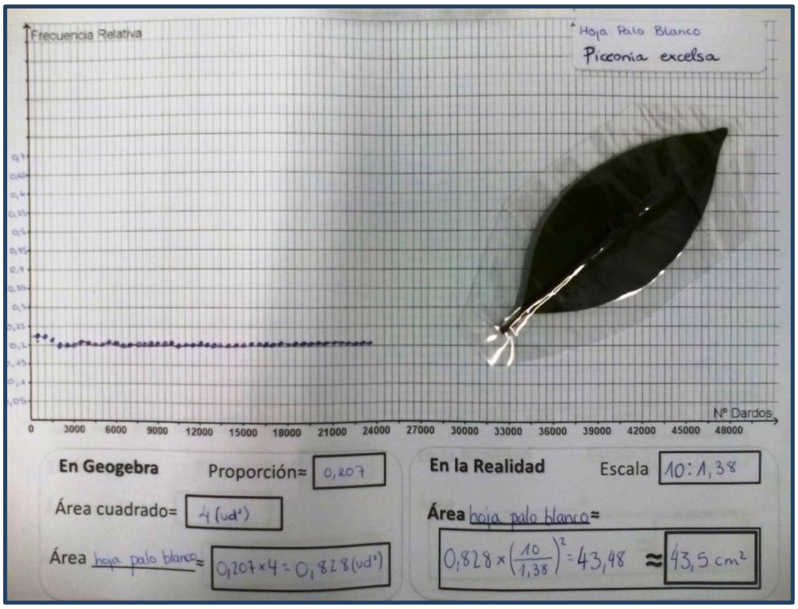
Mientras Oscar trabajaba en la infografía Ainhoa se informaba sobre la Ley de los Grandes Números que ya habíamos trabajado en clase, en este caso debía explicar la idea a través de una pequeña historia, en **cómic,** realizado con la aplicación Pixton.

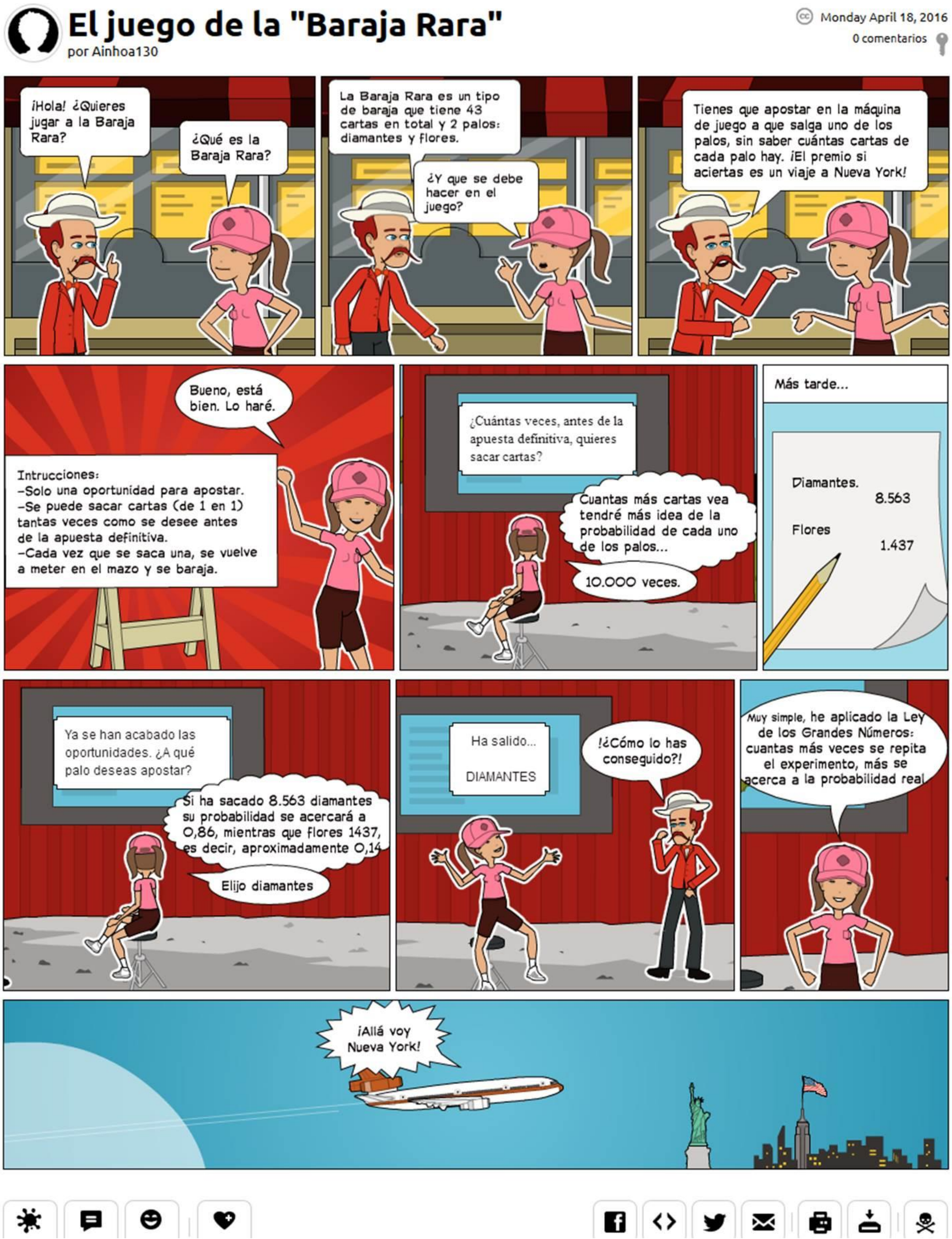
https://www.pixton.com/es/comic/s289e09z

Ainhoa nos cuenta sobre la Ley de los grandes Números

La Ley de los Grandes Números dice que cuantas más veces se repite un experimento, la frecuencia relativa con la que ocurre un suceso, se irá acercando a la probabilidad real o teórica, que es la que normalmente calculamos con la regla de Laplace. Realmente la comprensión de esta ley no resultó una tarea ardua porque en clase ya habíamos tocado este tema, lo que de verdad resultó más complicado fue el hecho de reflejar, de una forma lo más amena y comprensible posible, esta Ley. Cosa que finalmente realicé, en forma de cómic virtual, mediante una historieta ficticia que intentaba plasmar la teoría. Personalmente, esto fue lo que más me costó crear, y es que requería un gran aporte de imaginación a la vez que de criterio matemático. Finalmente lo logré e inventé este corto relato, que pienso que es lo bastante claro y conciso para que se entienda a la perfecció.

La Ley de los Grandes Números nos sirvió de gran ayuda, puesto que la aplicamos en el número de dardos que lanzábamos, junto con el elevado número de repeticiones; lo que nos permitió una mayor exactitud a la hora de calcular el área. Los primeros datos eran lejanos entre sí y no mostraban un número concreto. Sin embargo, tras más repeticiones, las cifras se iban estabilizando hasta un número concreto, como se puede apreciar en el gráfico de la hoja de Palo Blanco *(Picconia excelsa).*





https://www.pixton.com/es/comic/s289e09z

Nuestra tercera componente, Carla, se dedicó a entrar en las profundidades de GeoGebra con el objetivo de construir nuestra herramienta: la **Máquina**. Una vez controlado se propuso grabar un vídeo en el que explica dicha construcción paso a paso con mucho detalle:

https://www.youtube.com/watch?v=B--qONgBTZE&feature=youtu.be

Carla nos cuenta la construcción de la Máquina de áreasRARAS

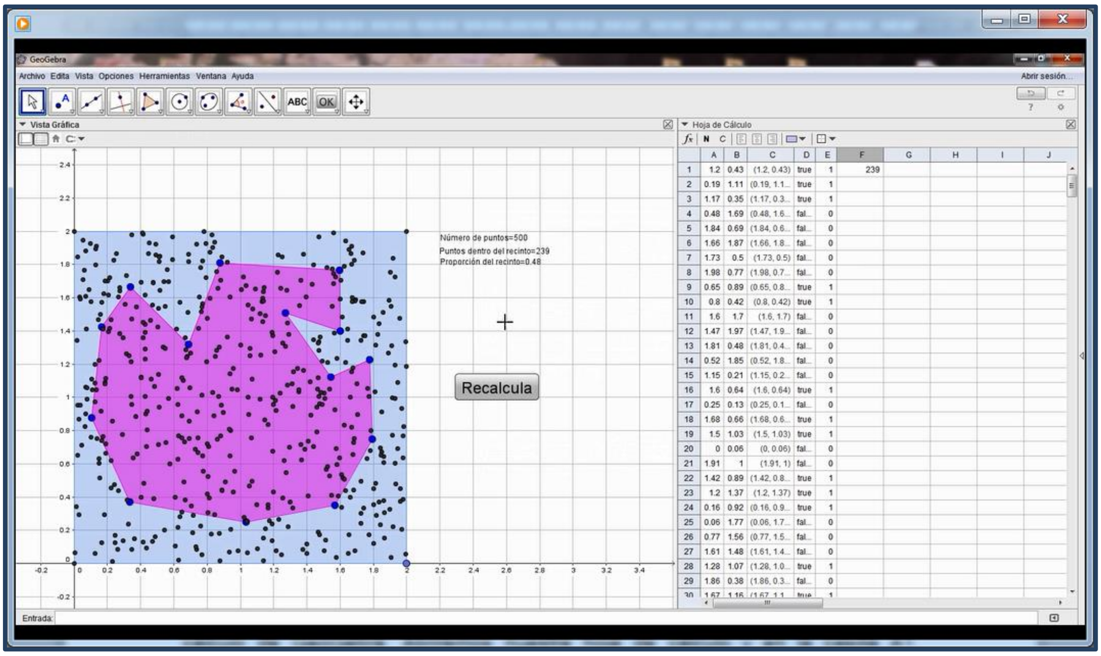
Para construir nuestra máquina, usaremos tanto la parte geométrica, como la hoja de cálculo, que nos ofrece el programa. Empezaremos usando la vista gráfica. En primer lugar, crearemos un cuadrado con área de 4 ud^2, y dentro de éste, haremos una figura irregular con el nombre *"poli"*. Para continuar con nuestro proyecto, ahora nos ayudaremos de la hoja de cálculo de GeoGebra. Abriremos nuestra hoja de cálculo y en la casilla A1, escribimos un número aleatorio, utilizando *2*random()*, esto indica, que se nos va a escribir, aleatoriamente, un número entre 0 y 2. Seguiremos los mismos pasos en la casilla B1. Y a continuación, en la casilla C1, crearemos nuestro primer punto aleatorio, o dardo, escribiendo lo siguiente:(A1, B1).

"Me sentí bastante cómoda realizando el vídeo, y estoy orgullosa del resultado final pues, creo que es fácil de entender."

Ahora, en la casilla D1, pondremos *EstáEnRegión[C1, poli],* nos aparecerá *true* (verdadero en inglés), si el punto está dentro de la figura irregular, o *false* (falso en inglés), si está fuera.

En la E1, haremos que aparezca un 1, si el punto se encuentra dentro de *poli*, o un 0, en el caso de que esté fuera; tecleamos lo siguiente *Si[EstáEnRegión[C1, poli], 1, 0]*. Copiaremos todas la casillas que hemos escrito, 500 veces (500 dardos).

Calcularemos los puntos que están dentro del polígono, sumando todos los 1, que tenemos en la columna E. Posicionamos nuestro mouse en la casilla E501, y clicamos el símbolo de suma. Arrastramos toda la columna. En la celda E501, aparecerá la cantidad de puntos que se encuentran dentro del polígono irregular. Para tener el número más a mano, en la casilla F1, copiaremos el resultado de la *E501*.



Volveremos a la vista gráfica, y crearemos un botón con el nombre de *Recalcula*. Este botón, mediante la instrucción *ActualizaConstrucción[],* hará que la posición de todos los "dardos" cambie.

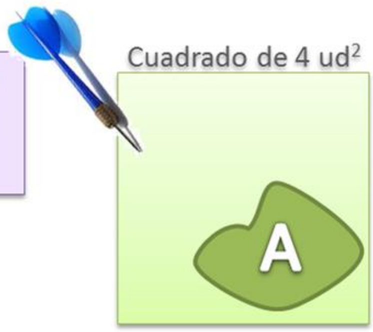
Colocaremos un texto para calcular la proporción, dividiendo el número de dardos dentro de *poli*, y el número de puntos totales, es decir, 500. Pondremos *Proporción= F1/500.*

Todo esto, está reflejado en un vídeo hecho por mí, en el cual, se entiende mucho mejor gracias al contenido audiovisual. Me sentí bastante cómoda realizando el vídeo, y estoy orgullosa del resultado final pues, creo que es fácil de entender.

Fase de comprobación:

Una vez controladas las herramientas que sustentan el proyecto y, en concreto, la aplicación de GeoGebra para el cálculo de áreas irregulares, queda comprobar que realmente funciona y nos podemos fiar de ella. Carla parece estar segura de ello pero debemos demostrarlo. Nuestra hipótesis es la siguiente:

Sí lanzamos un número suficientemente alto de dardos aleatorios sobre una superficie de área conocida (cuadrado de 4 ud^2)



Ley Grandes Números + Probabilidad Geométrica

ENTONCES

$$p = \frac{\textit{Dardos que caen dentro de A}}{\textit{Dardos totales}} \approx \frac{\textit{Área de A}}{4_{(\textit{Área cuadrado})}}$$

Y ASÍ

$$\textit{Área de A} \approx 4 \; x \; p_{\textit{Proporción de dardos dentro de A}}$$

Para comprobar nuestra máquina, cambiamos nuestro polígono irregular, por un círculo, es decir por una figura de la cual conocemos su área mediante una fórmula. En mi caso, el círculo tiene un radio de 1 ud, con lo cual, su área es **π**, lo que redondeado, debería dar 3,14. Además, a lo largo de esta fase, mientras buscábamos información en la red, encontramos una referencia que respaldaba nuestro experimento el *Método de Montecarlo* (mediados del siglo XX).

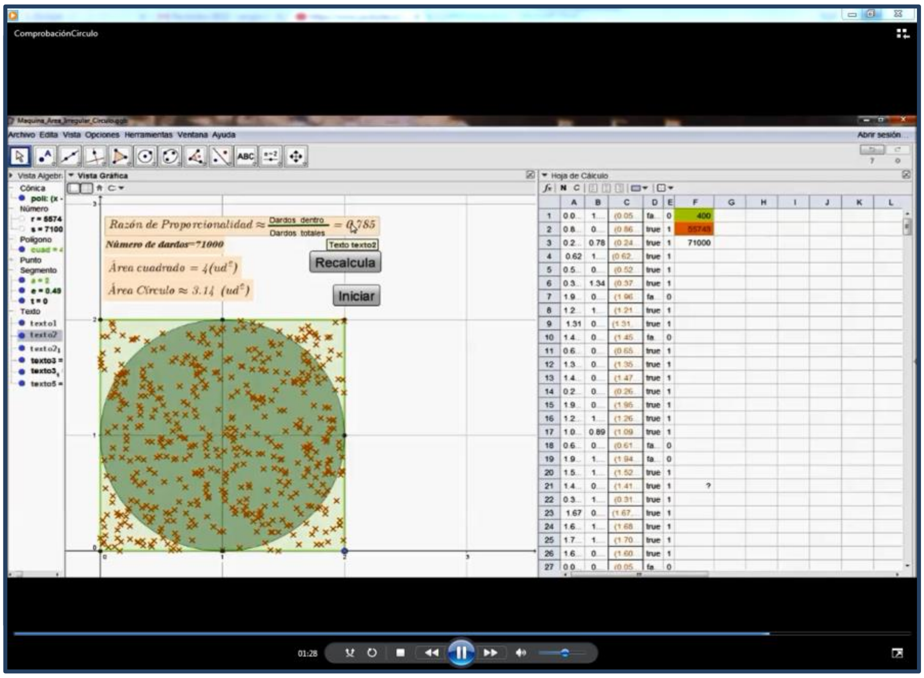
El uso de los métodos de Monte Carlo como herramienta de investigación, proviene del trabajo realizado en el desarrollo de la bomba atómica durante la Segunda Guerra Mundial

Pero ahora, lo que interesa es calcular esa área, utilizando la máquina que hemos creado. Para ello, lanzamos dardos seguidamente hasta que llegue un punto en el que la proporción se nos estabilice. A mí me ocurrió al cabo de 70.000 dardos.

Cuando pase esto, multiplicaremos la proporción(frecuencia relativa) por 4 (el área del cuadrado donde se encuentra el círculo), si esta multiplicación nos da 3,14 (el área del círculo), significa que nuestra máquina funciona,…. ¡FUNCIOOOONAAAA!.

¡Viva Galileo!

Si no te lo crees y quieres verlo con tus propios ojos te lo explico en este nuevo vídeo https://www.youtube.com/watch?v=JBC7C6cBe8Y (duración 1:46)

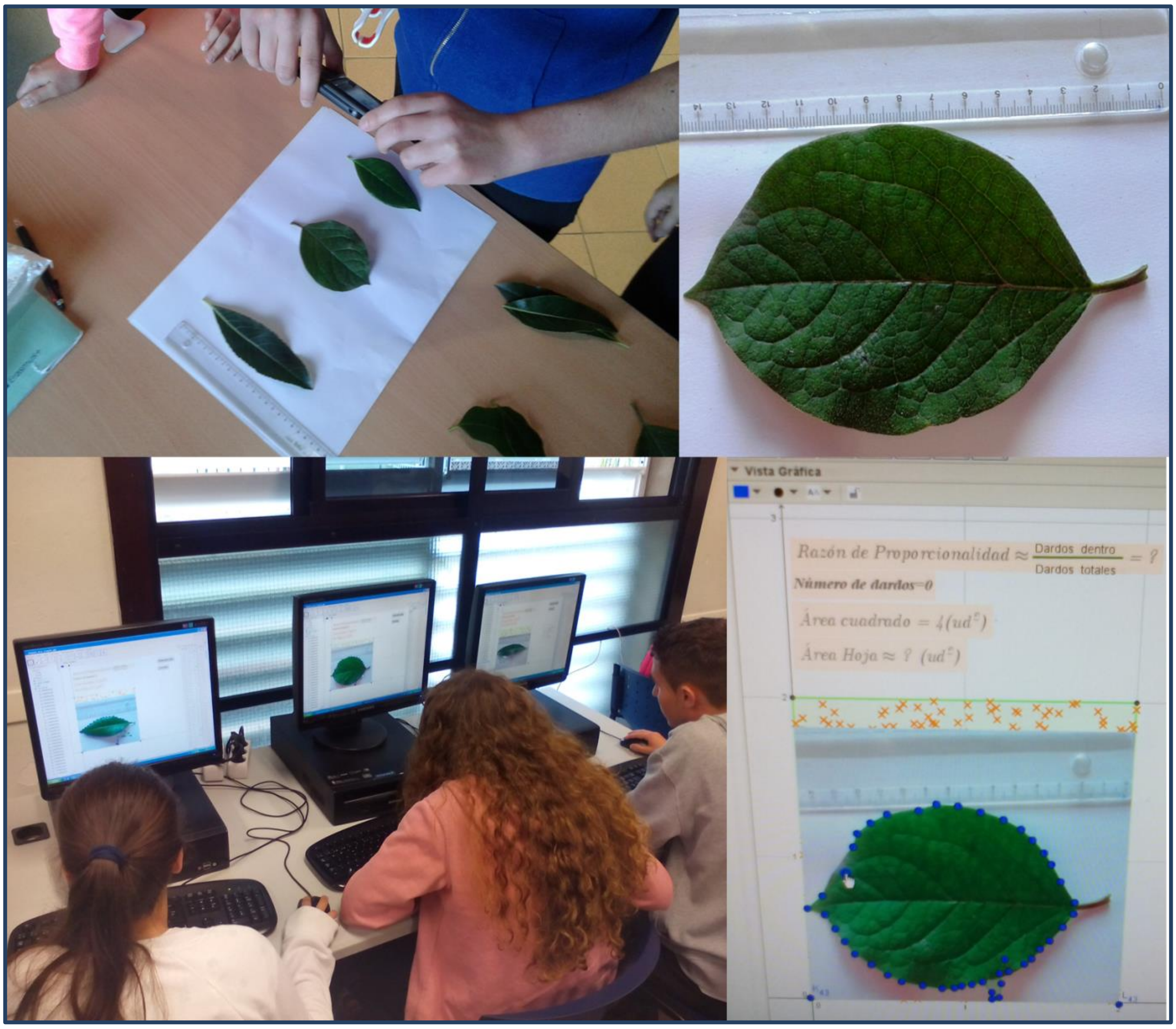


Fase de aplicación:

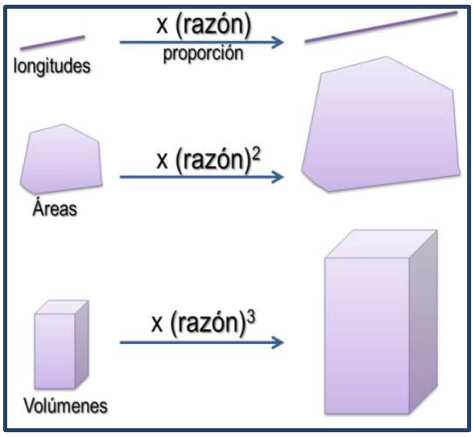
Nuestra máquina parece que funciona, pues entonces ahora vamos a ver y comprobar sus aplicaciones a varios niveles.

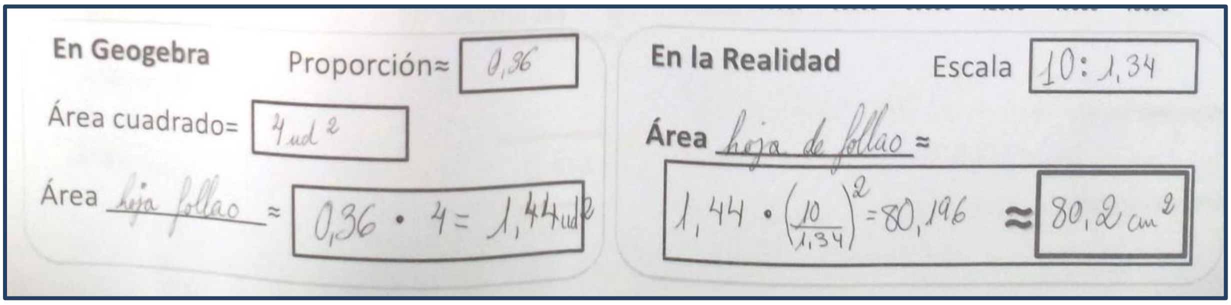
<u>Aplicación 1</u>: Superficie de hojas irregulares de nuestro jardín canario

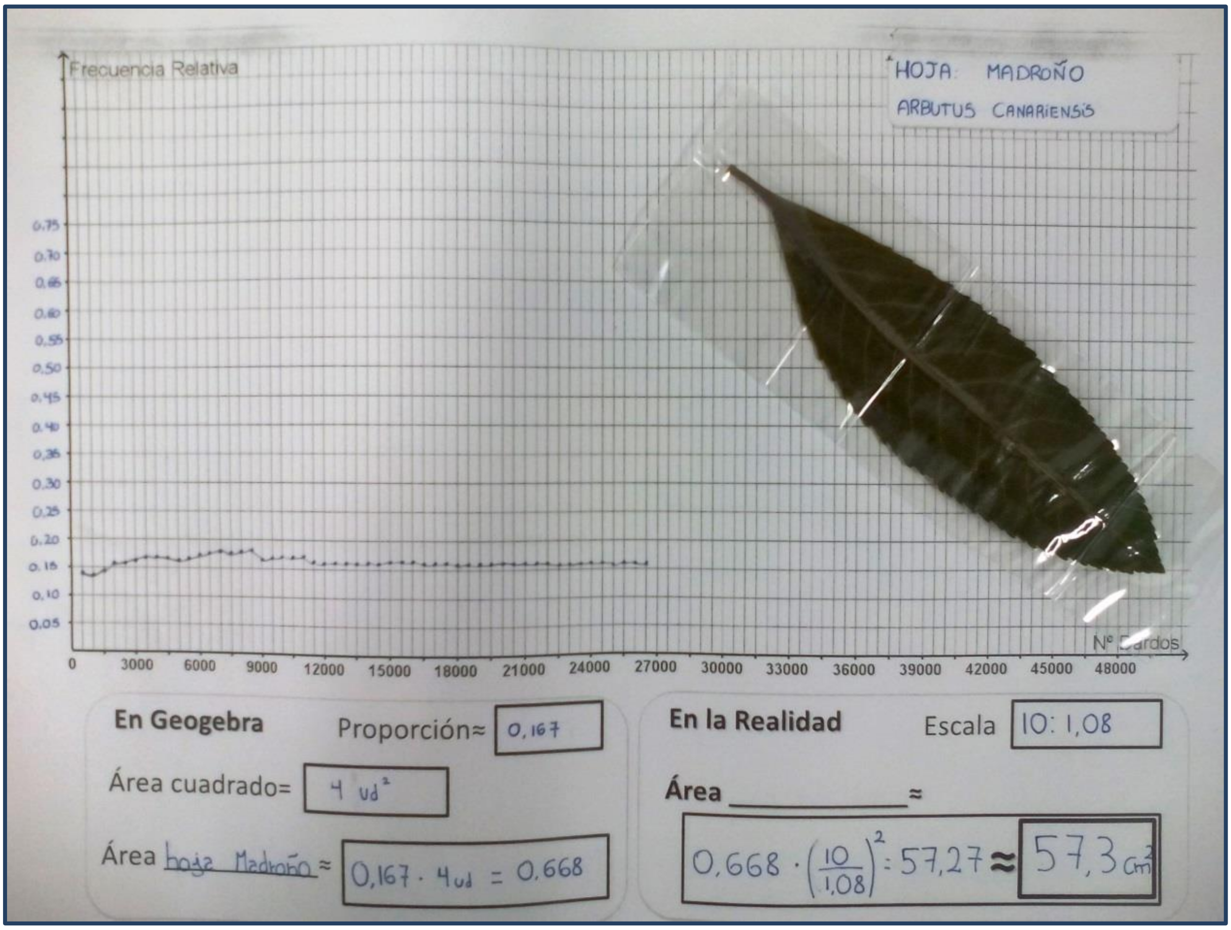
Lo primero, buscar en nuestro entorno. El centro dispone de una extensión considerable de huerto escolar y jardín que Esteban Díaz, profesor de Biología, trabaja con esmero. Localizamos algunos árboles endémicos de Canarias de los que recogemos algunas hojas de muestra mientras hablarnos un poco sobre sus características principales. Finalmente, optamos por tres hojas de tres árboles distintos. Éstos son: el Follao *(Viburnum rigitum)*, el Madroño *(Arbutus canariensis)* y el Palo Blanco *(Picconia excelsa)*.



A continuación, colocamos las hojas sobre fondo blanco y en compañía de una regla, que sirviera de referencia, para sacarle unas fotografías. Después las insertamos en la Máquina de GeoGebra y comenzamos a lanzar dardos aleatorios aplicando lo visto anteriormente. Cuando se estabiliza la proporción de dardos anotamos y hacemos la proporción de unidades² de GeoGebra para pasar posteriormente a la realidad a través de la escala que, obviamente, es distinta en cada caso. En la imagen, por ejemplo, 10:1,34 significa que 10 cm en la realidad (regla) equivalen a un segmento dentro de GeoGebra que mide 1,34 ud. Y ya sólo queda el último paso en el que debemos tener cuidado ya que al estar hablando de superficies la razón de proporción debe ir al cuadrado.





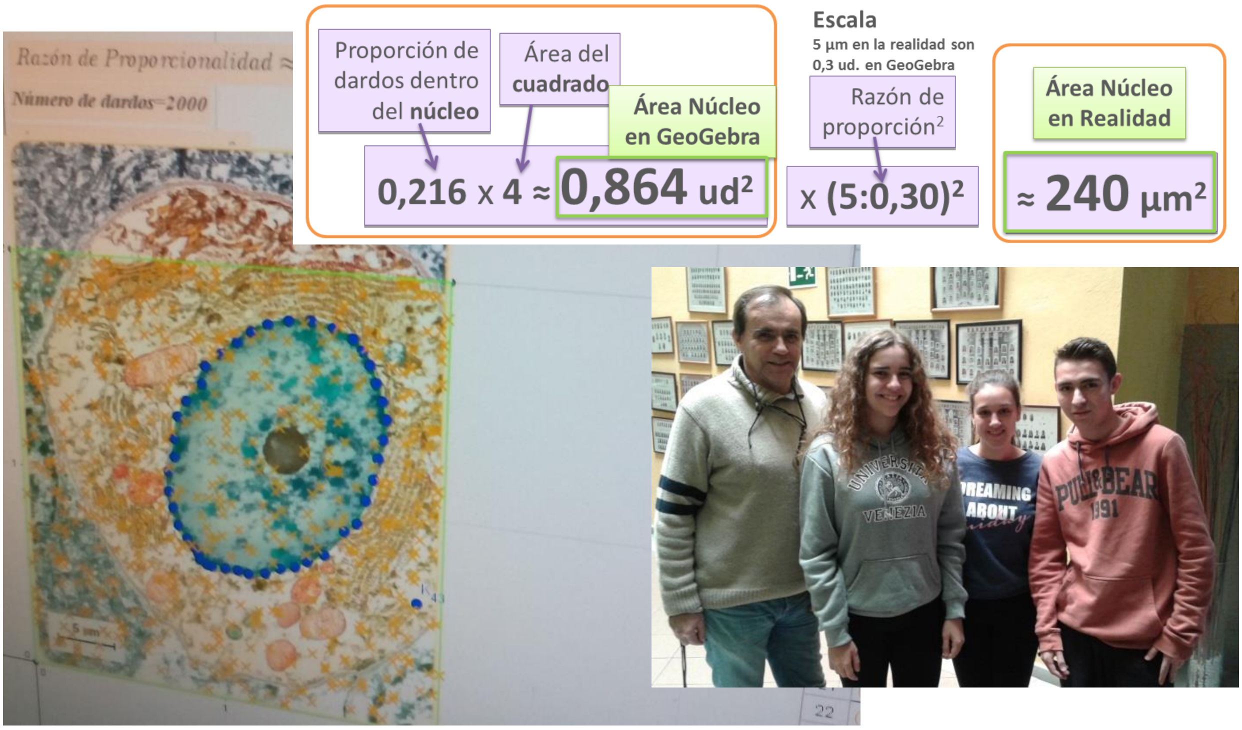


Aplicación 2: Superficie de núcleo y orgánulos celulares

Para continuar con nuestro trabajo de investigación, pedimos ayuda a Antonio Hernández, profesor de biología y director de nuestro centro, el cual se mostró muy amable a la hora de ayudarnos a buscar micro-imágenes de células y explicarnos los distintos orgánulos que se podían apreciar, así como sus distintas funciones. En este caso, como se ve en la imagen hemos rodeado el núcleo de la célula por un polígono irregular de GeoGebra y hemos lanzado dardos con nuestra Máquina. Como en el caso anterior, obtenemos una proporción que nos

De nuestro experimento en GeoGebra pasamos a la realidad, por muy pequeña que sea.

permite aproximar el área del núcleo (en GeoGebra), y como, según la escala de la fotografía, 5 micras corresponden a 0,3 ud en la pantalla podremos aproximar el área en la realidad multiplicando por la razón al cuadrado. En definitiva, obtenemos que el núcleo de esta célula debe medir alrededor de 240 µm².



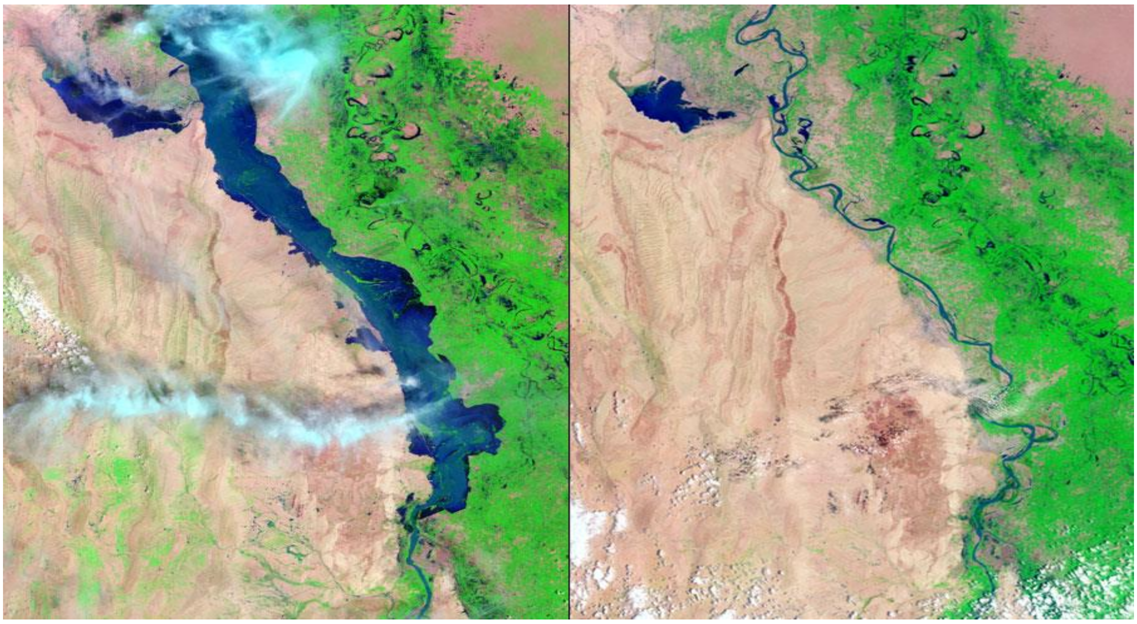
<u>Aplicación 3</u>: Superficie de imágenes de satélites (Pakistán)

Para terminar, además de la evidente parte matemática, biológica…, es decir, científica, hemos abarcado un tema más íntimamente relacionado con las personas: los desastres naturales que por ejemplo afectaron a 17 millones de personas en las inundaciones de Pakistán hace pocos años en el mes de agosto. Estas catastróficas inundaciones provocadas por grandes lluvias en Pakistán, han llegado a afectar a casi un 10 por ciento de la población del país, de los cuales, la mitad requieren asistencia humanitaria, mientras que, trágicamente, se calcula entre 1.200 y 1.600 los fallecidos. Desde un satélite, se ha podido fotografiar el desbordamiento del río Indus, ya que ni siquiera desde helicópteros se es posible apreciar, y se ha comparado con una foto igual pero de años atrás con el cauce normal. La

A veces, esa superficie calculada tiene historias muy tristes detrás. ¿Podremos ayudar con nuestra máquina?

diferencia que presentan es enorme teniendo en cuenta que cada imagen tiene de ancho aproximadamente 120 kilómetros.

Lo transformamos en una oportunidad para realizar otro experimento con la Máquina áreasRARAS que a lo mejor puede servir de ayuda a las personas.



http://www.scientificamerican.com/gallery/earth-observing-satellite-documents-pakistan-flooding/

CONCLUSIONES

"Hemos conseguido nuestro objetivo de construir la máquina que calcula áreas RARAS. Por el camino, hemos utilizado herramientas que ni siquiera éramos conscientes que estaban ahí, tanto tecnológicas como matemáticas. En definitiva, no sólo cumplimos nuestro primer objetivo sino que hemos elaborado un material, preparado para difundir en las redes, que creemos que puede servir a otros alumnos a entender cómo se relacionan las matemáticas con nuestro entorno inmediato."

El equipo

“Después de todo el duro trabajo que hemos realizado para poder hacer posible este proyecto, las conclusiones que saco personalmente, es que hemos “ayudado” al resto de personas de una forma u otra…”

“Pensar que este proyecto está conectado con algo que hizo Galileo Galilei, hace más de cuatro siglos, y hoy, nosotros hemos aportado, gracias a los avances de la tecnología, nuestro granito de arena.”

“Además, creo que esta ha sido una gran experiencia para todos, ya que hemos podido ampliar nuestros conocimientos matemáticos. Personalmente, creo que el trabajo tiene mucha dedicación y esfuerzo por parte de todos, ya que cada uno ha tenido que hacer sus “tareas”
y labores de investigación por su cuenta para así poder avanzar en el desarrollo del trabajo, pero honestamente, creo que no soy el único que ha quedado satisfecho con el trabajo y con el producto final.”

Oscar Cabrera

“Me ha gustado poder contribuir al desarrollo del proyecto, porque hemos conseguido crear una manera de calcular áreas de polígonos irregulares, gracias a la probabilidad.”

“Opino que es una experiencia única para los tres, que nos ha ayudado a ampliar nuestros conocimientos sobre las matemáticas”

Carla García

“…quién sabe si algún día enseñarán esto que hemos elaborado con tanto trabajo y empeño. En un primer momento pensé que todo era un poco caótico y es que teníamos que compaginarlo con el resto de actividades, además no veía muy clara la finalidad. Pero en el transcurso de éste, se ha convertido en un trabajo muy completo y con una meta concisa y absolutamente útil.”

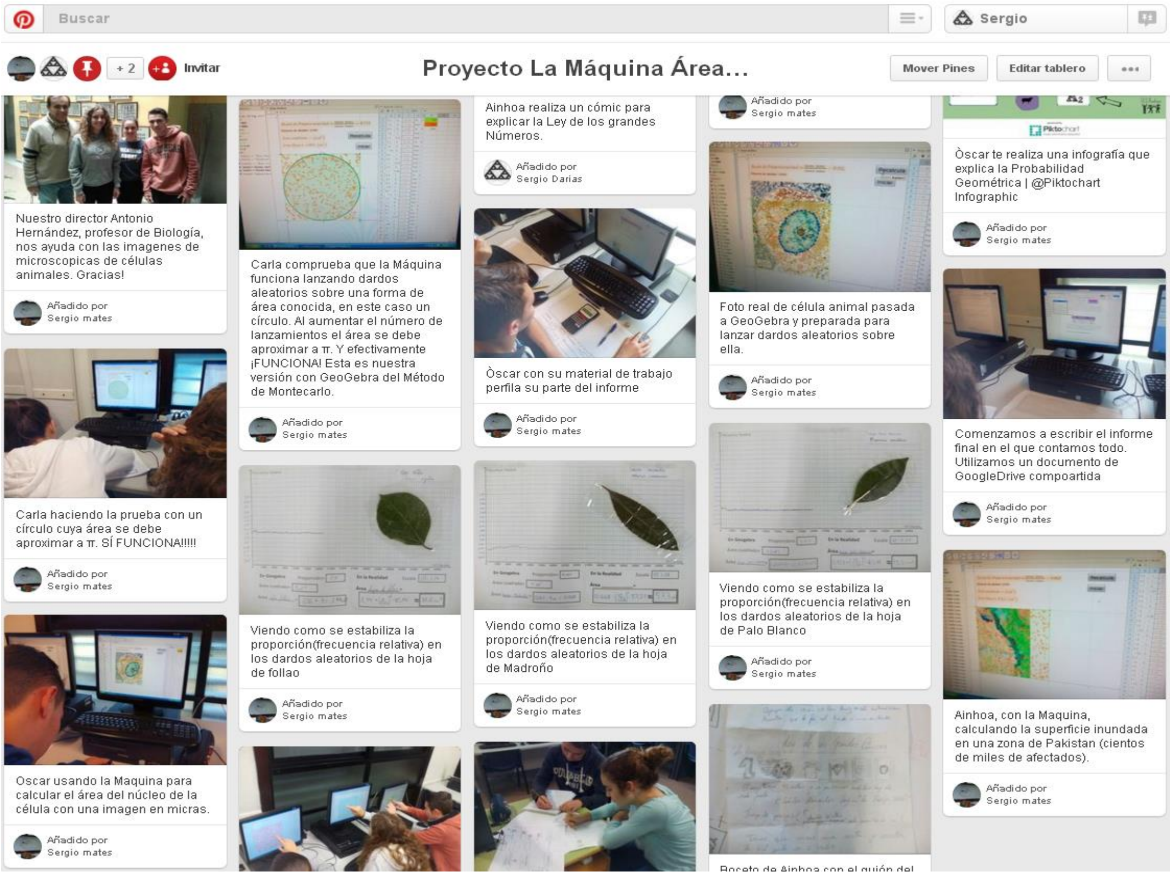
“La verdad es que he disfrutado elaborando el proyecto, ya sea por la compañía de los otros componentes del grupo de trabajo, que precisamente también forman parte de mi grupo de amistades, o por el hecho de sentir que he tenido el privilegio de colaborar en esto.”

Ainhoa Pérez

“Es siempre un placer trabajar con alumnado que tiene curiosidad y que te hace las cosas fáciles. Es un verdadero placer observar cómo va cambiando su mirada al realizar tareas, de las que no se sentían capaces, y entrar así en nuevos mundos desconocidos que propone la Matemática”

Sergio Darias

Todo lo hemos ido escribiendo en este diario visual de la investigación (Pinterest): https://es.pinterest.com/sergiovmates/proyecto-la-m%C3%A1quina-%C3%A1reasraras/



Antes de terminar queremos agradecer al Departamento de Matemáticas del IES Realejos su apoyo. Al profesorado que generosamente ha facilitado el proyecto desde su materia: Fabián Pérez, Luis Ramírez y José Juan Sánchez. Y especialmente a los biólogos, Esteban Díaz y Antonio Hernández que nos proporcionaron una visión mucho más amplia y rica de nuestros resultados.

REFERENCIAS

- Conferencia de D. Luis Balbuena Castellano en la Facultad de Matemáticas de la ULL. Ciclo *Un fisquito de matemáticas*. Título: "Galileo, listo y pillo" Vídeo: https://www.youtube.com/watch?v=DxCcymVIJ9s&list=PLAqmRmkVzl1-Dgz6QK15DJ9Y8JGlP51WR&index=1
- Problemas de probabilidad geométrica. D. Ricardo Miró http://www.rinconmatematico.com/miro/probgeom/probgeom.htm
- Revista SUMA: Sobre la utilidad de la Geometría en la enseñanza de la Probabilidad. D. Gabriel Ruiz Garzón http://revistasuma.es/IMG/pdf/37/067-074.pdf
- Web Probabilidad Geométrica hotmath.com http://catchupmath.com/hotmath_help/spanish/topics/geometric-probability.html
- Método de Montecarlo (Wikipedia) https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_Montecarlo
- Materiales didácticos. Proyecto Descartes. Ministerio de Educación. http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/EDAD_4eso_B_semejanza/impresos/quincena6.pdf
- Materiales Didácticos. Proyecto Descartes. Estadística 3º ESO http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/IntroduccionEstadisticaProbabilidad/3ESO/10IniciacionProbabilidadExperimental.html
- Los problemas de probabilidades geométricas. Procopio Zoroa Terol http://revistas.um.es/analesumciencias/article/viewFile/102651/97601

- Imágenes: https://www.blinklearning.com/useruploads/ctx/a/23351709/r/s/5111149/Capturadepantalla2015-08-11alas17.55.46.jpg **http://www.scientificamerican.com/gallery/earth-observing-satellite-documents-pakistan-flooding/**