NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 124, noviembre de 2026, 139-174

Problemas y soluciones. Problemas Comentados LXXIII

José Antonio Rupérez Padrón
Manuel García Déniz
Francisco Morales Villegas
(Club Matemático)

Resumen Como en anteriores ocasiones presentamos distintos métodos para la resolución de los problemas propuestos en nuestro anterior artículo, siguiendo las cuatro fases de la resolución: comprender, pensar, ejecutar y responder. El uso de esquemas, tablas de doble entrada, hojas de cálculo, la lógica, demostrar que no hay solución o dibujos aclaratorios, son técnicas e instrumentos habituales en las soluciones aportadas.

Palabras clave Soluciones a problemas de anterior artículo propios para alumnado de Primaria y Secundaria, Técnicas de resolución de problemas: Esquemas, tablas de doble entrada, hojas de cálculo, la lógica, demostrar que no hay solución o dibujos aclaratorios

Abstract As in previous occasions, we present different methods for solving the problems proposed in our previous article, following the four phases of problem-solving: understanding, thinking, executing, and responding. The use of diagrams, double-entry tables, spreadsheets, logic, proving that there is no solution, or clarifying drawings are common techniques and tools used in the solutions provided.

Keywords Solutions to problems from previous articles suitable for Primary and Secondary school students, Problem-solving techniques: diagrams, double-entry tables, spreadsheets, logic, showing that there is no solution, or clarifying drawings

1. Introducción

En el anterior artículo presentamos como retos una gran variedad de problemas. Los más interesantes, los clásicos, tanto los extraídos de los libros de Vicente Meavilla como los de la página web EPSILONES. Otra cosa son los retos que provienen del Test de Bertoldino, que casi todos suponen problemas capciosos.

2. Las soluciones de los retos

A continuación, les presentamos algunas posibles soluciones a dichos retos. Como saben, siempre intentamos presentar diferentes formas de encontrar la respuesta de cada uno de los problemas. Somos tres autores pensando sobre la misma forma de trabajar y, por si fuera poco, tratamos de encontrar alguna otra solución ajena, que tomamos prestada para el conocimiento de nuestros lectores. Empezamos con los de hoy.

Los primeros se corresponden con los del Test de Bertoldino, cuya página web nos indica:

Sociedad Canaria de Profesorado de Matemáticas
Luis Balbuena Castellano

*"El **Test de Bertoldino** es una colección de problemas elementales para los cuales la respuesta justa no es la que nos viene a la mente en primer lugar".*

Se ha elegido el nombre "Bertoldino" inspirándonos en el cuento *Le piacevoli et ridicolose simplicità di Bertoldino* de Giulio Cesare Croce, de 1608.

Este test debería ayudarnos a no caer ingenuamente en una trampa elemental del *problem solving*.

¿Qué trampa?

Bien, cuando se resuelven problemas matemáticos es necesario tener siempre acceso al **razonamiento** y la **conciencia**.

Por el contrario, los alumnos a menudo buscan rápidamente **esquemas** para aplicar a la situación. A mí también me pasa a veces y creo que nos ha pasado a todos, incluso con problemas sencillos.

Así pues, la trampa consiste en aplicar instintivamente un esquema de resolución erróneo sin analizar la situación."

Nosotros trataremos de evidenciar dicha trampa, aunque haremos alguno (de los más complejos) utilizando el proceso habitual: COMPRENDER-PENSAR-EJECUTAR-RESPONDER.

PROBLEMA 1. LOS PELDAÑOS DE LA ESCALERA

Alfredo se encuentra sobre el peldaño central de una escalera apoyada en un muro.
Desciende 3 peldaños y después sube 12 peldaños y se encuentra en lo alto de la escalera.

¿Cuántos peldaños tiene la escalera?

Siempre afirmamos con rotundidad que la fase más importante del proceso es la de COMPRENDER.

Al realizar la lectura (matemáticamente comprensiva) hay dos aspectos semiocultos y otros dos muy visibles.

Los visibles son que desciende 3 peldaños y después sube 12.

Los semiocultos son que comienza en el peldaño central de la escalera y termina en lo alto, es decir, en el último peldaño.

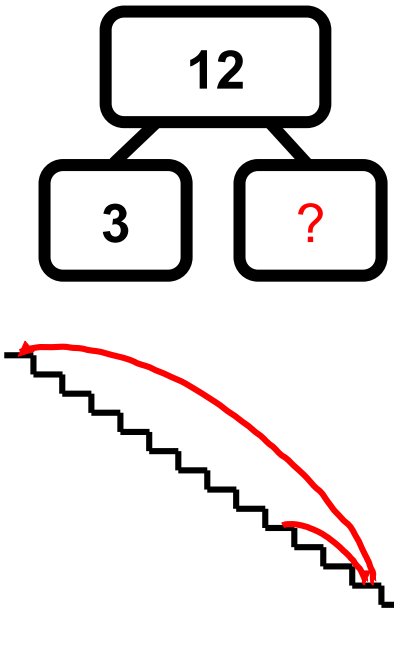
En consecuencia, ha subido 9 peldaños. Luego, la escalera tiene otros 9 peldaños hacia abajo.

La respuesta inmediata, sin razonamiento ni conciencia nos empuja a decir que la escalera tiene 9 x 2 = 18 peldaños.

¡Error!, las prisas nos han hecho olvidar el peldaño central. La respuesta correcta es, por consiguiente, que **la escalera tiene 19 peldaños**.

Podríamos hacer el proceso habitual utilizando de manera preferente para facilitar la comprensión una estrategia de MODELIZACIÓN.

Podríamos utilizar dibujos, esquemas, diagramas o tablas como las siguientes:



		12		1
		11		2
		10		3
		9		4
		8		5
		7		6
		6		7
		5		8
		4		9
0		3		10
	-1	2		11
	-2	1		12
	-3			13
				14
				15
				16
				17
				18
				19
				20
				21
A	B	C	D	E

PROBLEMA 2. LAS CIFRAS DE UN NÚMERO

¿Qué número tiene dos, cinco, dos tres?

[A] 5533
[B] 2523
[C] 2533
[D] 5523

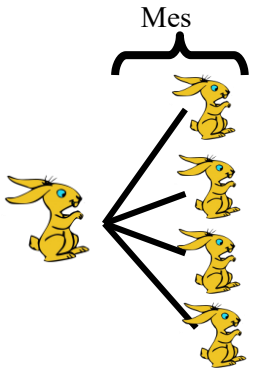
Aquí tenemos un problema de lenguaje. ¿Qué entienden nuestros niños cuando leen? ¿Son conscientes de los matices que introducen los signos de puntuación?

Está claro que aquí las comas indican que las palabras “dos” y “cinco” son nombres de cifras, pero entre las palabras “dos” y “tres” siguientes no tienen el mismo valor lingüístico: “dos” indica cantidad y “tres” es nombre de cifra. Por tanto, **la respuesta correcta es la [C]: un 2, un 5, dos 3**.

PROBLEMA 3. CONEJOS

Los conejos adultos se reproducen generando 4 crías cada mes.
Se mete un conejo adulto en una jaula durante 3 meses, **¿cuántos conejitos producirá?**

Lo habitual de nuestros alumnos ante este tipo de problemas consiste en ver sólo números y operaciones implícitas en el enunciado, por lo que de inmediato harán 4 x 3 = 12.



Nos falta información:

El tiempo que tarda un conejo en hacerse adulto. El sexo del conejo que se ha metido en la jaula. Y alguna cosa más: ¿se trata de una hembra preñada? Cuando nazcan las crías, ¿serán hembras y machos por igual?

Es importante que nuestros alumnos comprendan que hay problemas donde la respuesta es que **no hay solución**.

PROBLEMA 4. PAPAS DESHIDRATADAS

Imaginamos tener 100 kg de papas, que contienen un 99% de agua. Supongamos ahora que las hacemos deshidratar, hasta que contengan el 98% de agua. **¿Cuál es el nuevo peso?**

La inmediatez de nuevo nos lleva a considerar que ese 1% menos de agua nos conduce irremediablemente a un 1% menos de peso total, es decir, el nuevo peso es 99 kg.

Para ver que eso no es así basta con aplicar una estrategia sencilla, como puede ser ENSAYO Y ERROR. Las papas sólo llevan de sólido 1kg y eso no cambia, aunque deshidrates. Lo que cambia es la cantidad de agua presente. Utilizamos la siguiente tabla:

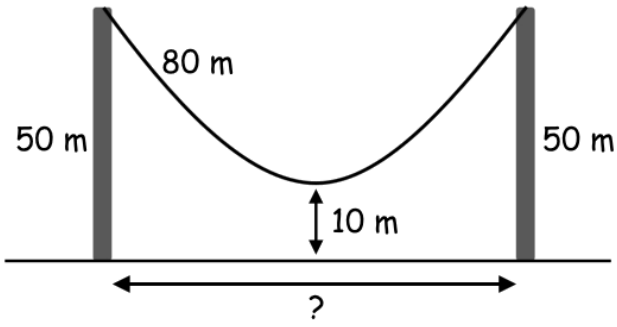
HIDRATACIÓN				Resultado
agua	**sólido**	**total**	**porcentaje**	
99	1	100	99	Inicio
98	1	99	98.98	Mucha agua
70	1	71	98.59	Mucha agua
60	1	61	98.36	Mucha agua
50	1	51	98.03	Mucha agua
49	1	50	98	Correcta
48	1	49	97.96	Poca agua

Así pues, la respuesta es que **el nuevo peso de las papas es de 50 kg**.

PROBLEMA 5. DISTANCIA ENTRE LOS PALOS

Los extremos de una cuerda de 80 metros de largo, que cuelga libre, son fijados a lo alto de dos palos de 50 metros de altura: un extremo en lo alto de un palo y el otro extremo en lo alto del otro.

¿A qué distancia se deben colocar los dos palos para que el punto más bajo de la cuerda esté exactamente a 10 metros sobre el suelo?



El exceso de números no nos deja ver lo esencial de la situación. Tampoco la imagen contribuye mucho. En seguida se nos vienen a la mente situaciones geométricas complicadas: teorema de Pitágoras, curvas catenarias, etc.

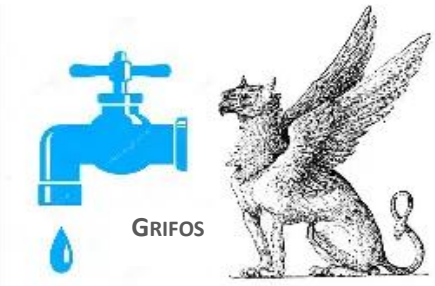
A medida que los palos se acerquen, la cuerda que pende de ellos irá bajando. ¿Hasta cuándo podrá bajar? Pues no demasiado. La cuerda tendrá en el punto más bajo, dos partes que medirán 40 metros, la mitad de la cuerda. Por lo tanto, en ese caso extremo, como los palos miden 50 metros, habrá que juntarlos entre sí para que queden 10 metros hasta el suelo.

Respuesta: los palos deben estar juntos entre sí, es decir, **la distancia entre ellos ha de ser cero metros**.

Y ahora a cambiar de retos. Toca ahora afrontar los de Vicente Meavilla.

LOS CLÁSICOS

Ahora, consideremos un aljibe que se llena a través de 5 canales. Abre el primer canal y el aljibe se llena en 1/3 de día; con el segundo, se llena en 1 día; con el tercero en 2 días y medio; con el cuarto, en 3 días, con el quinto, en 5 días. Supón que se abren todos ellos. Di, ¿cuántos días son necesarios para llenar el aljibe?



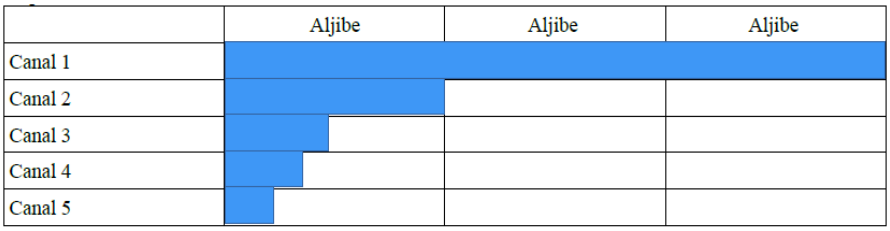
FASE 1 - COMPRENDER

Datos: hay un aljibe y 5 canales que lo pueden rellenar.

Objetivo: saber los días que se necesitan para llenar el aljibe.

Relaciones: con el agua del primer canal en aljibe se llena en 1/3 de día. Con el agua del segundo canal se llena en un día. Con el del tercero se llenan 2 días y medio. Con el del cuarto se llena en 3 días. Con el del quinto se llena en 5 días.

Esquema de lo que sucede en un día.



FASE 2 - PENSAR

Podemos utilizar la estrategia de organización de la información.

FASE 3 - EJECUTAR

Canal 1: si tarda 1/3 de día, en 1 día llena 3 aljibes. 3
Canal 2: si tarda 1 día, en 1 día llena 1 aljibe. 1
Canal 3: si tarda 2,5 días, en 1 día llena 1/2,5 0,4
Canal 4: si tarda 3 días, en 1 día llena 1/3 0,333
Canal 5: si tarda 5 día, en 1 día llena 1/5 0,2

Todos juntos en 1 día llenan: 3 + 1 + 0,4 + 0,333 + 0,2 = 4,933 aljibes

En llenar 1 aljibe se tarda 1/4,933 = 0,2027 días. Si lo pasamos a horas: 4,86 horas = 4h 51 min 53 s.

FASE 4 - RESPONDER

COMPROBAR

Podemos calcular lo que llena cada canal en 0,2027 días.

0,6081 + 0,2027 + 0,081 + 0,0675 + 0,0405 = 0,9998

ANALIZAR

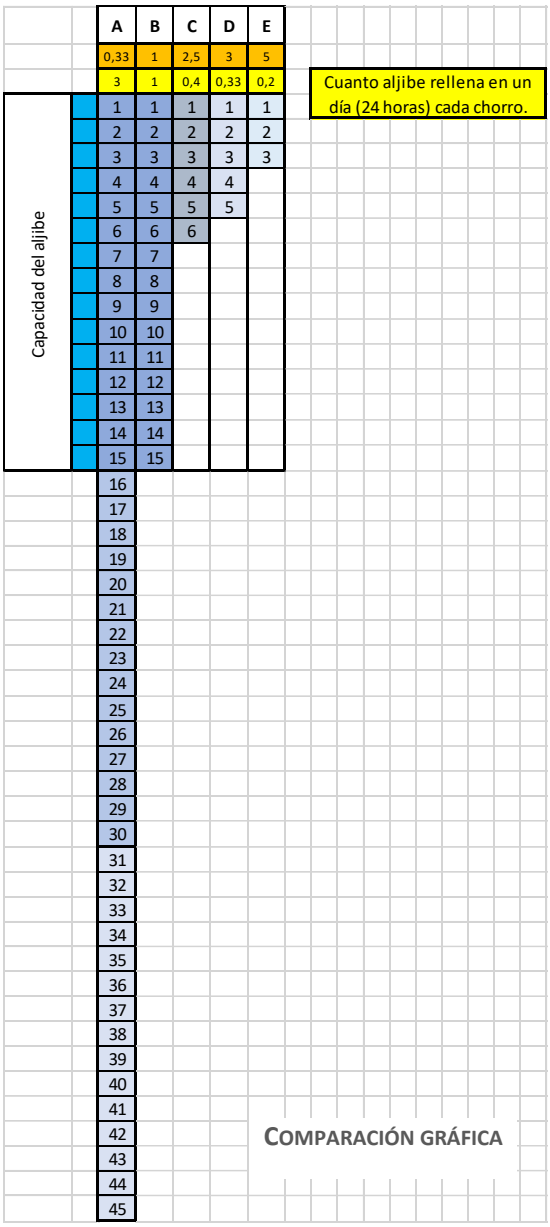
La solución al problema es única. No hay otro tiempo diferente al obtenido.

RESPONDER

Para llenar el aljibe se necesitan 0,2027 días. Es decir, 4 horas y 52 minutos.

Adaptación para cursos intermedios de educación primaria.

Podemos reducir el número de canales a 3. El tiempo de llenado puede ser todo con números enteros, por ejemplo: el canal 1 tarda 2 días, el canal 2 tarda 4 días y el canal 3 tarda 5 días. También se puede simplificar la pregunta, teniendo que averiguar qué parte del depósito llenarán entre los 3 canales en un solo día.



Otro método de resolución:

Puesto que los tiempos de llenado se miden en múltiplos o divisores de días, podemos suponer la capacidad del aljibe como una cantidad múltiplo o divisor de 24 horas, para simplificar los cálculos.

Supongamos que el aljibe tiene una capacidad de 24 m^3, y calculamos cuántos metros cúbicos llena cada canal o chorro en una hora:

Canal 1: $24 \cdot 3/24 = 3\ m^3$
Canal 2: $24 \cdot 1/24 = 1\ m^3$
Canal 3: $(24 \cdot 1/2.5)/24 = ½ .5 = 0.4\ m^3$
Canal 4: $(24 \cdot 1/3)/24 = 1/3 = 0.333\ m^3$
Canal 5: $(24 \cdot 1/5)/24 = 1/5 = 0.2\ m^3$

Los cinco canales vertiendo agua al tiempo llenan, en una hora: $3 + 1 + 0.4 + 0.333 + 0.2 = 4.933\ m^3$

Por tanto, tardarán $24/4.933 = 4.865$ horas en llenar los 24 m^3, que pasados a horas minutos y segundos hacen un tiempo de 4h 51’ 54’’.

Es lo mismo, pero tomando como unidad una hora en vez de un día.

Bueno, pues en mi época de estudiante de Bachillerato (escribe Manolo) el profesor de álgebra decía que esto era un problema de grifos (categoría de modelo a memorizar) y que se resolvía siempre haciendo los inversos de los valores dados y sumándolos. Al valor de esa suma se le hallaba el inverso y representaba la solución. Es decir:

$3/1 + 1/1 + 2/5 + 1/3 + 1/5 = (45 + 15 + 6 + 5 + 3) / 15 = 74/15$

Solución: 15/74

¡Eso sí era enseñar!

¿Y cómo lo hacían nuestros antepasados? Vicente Meavilla y su compañero Antonio Oller se tomaron el trabajo de buscar los problemas y sus soluciones para transcribirlos al castellano actual y dar algunas explicaciones sobre los métodos utilizados.

Solución: **en 15/74 de día.**

Método: dispón la cantidad llenada en un día por cada canal. Suma para el divisor, toma 1 día como dividendo. Divide, obteniendo la respuesta.

Método alternativo: dispón el número de días y las veces que se llena la cisterna [en dos columnas]. Multiplica las veces que se llena la cisterna por el correspondiente número de días. Suma para el divisor. Toma el producto continuo de los números de días como dividendo. Divide, obteniendo la respuesta. (Kangshen et al., 1999, p. 343)

El primero de los métodos presentados no requiere explicación, simplemente se calcula la parte de aljibe que se llena en un día si se utilizan todos los canales y, con ello, el tiempo necesario para llenarlo completamente.

Sin embargo, el segundo método no es en modo alguno evidente y, de hecho, su lectura resulta confusa. En realidad, se trata de una aplicación del método de "homogeneización y uniformización". Este método, que es central en todo el *Jiu Zhang Suan Shu,* aparece descrito en Kangshen (1999, pp. 59-60) y se utiliza para lo que hoy se denomina "reducir fracciones a común denominador".

En el caso que nos ocupa, el autor construye una serie de fracciones en las que el numerador indica cuántas veces se llena el aljibe y el denominador los días necesarios para llenarlo ese número de veces (evidentemente, esto requiere un trabajo previo sobre los datos del problema para obtener valores enteros, como indica un comentarista del texto: "si se llena una vez en 2 días y medio, eso significa dos veces en 5 días"). A continuación, se reducen esas fracciones a común denominador (multiplicando todos los denominadores originales, 75 en este caso, y hallando los numeradores correspondientes) igualando así el número de días para todas las cisternas. Después se suman las veces que llena el aljibe cada canal en este nuevo número de días y así se obtiene cuántas veces se podría llenar el canal en 75 días, 370 en este caso. Basta dividir los días entre las veces para calcular el tiempo necesario para llenarlo 1 vez.

Educación Matemática, vol. 26, núm. 1, abril de 2014 109
Antonio M. Oller Marcén y Vicente Meavilla Seguí

CULTIVANDO ROSAS.

Un hombre fue a una huerta a coger rosas, en el cual había 4 porteros. El cual hombre prometió al primer portero que si le dejaba entrar que le daría la mitad de las rosas que trajese y media más, sin partir. El primero le dejó entrar y fue al segundo portero y le dijo que le dejase entrar y que le daría los dos tercios de las rosas que trajese y dos tercios más, sin partir.

El segundo fue su voluntad de dejarle entrar. Fue al tercero y le prometió que si le dejase entrar que le daría los tres cuartos de las rosas que sacase y tres cuartos de rosa más, sin partir. Le dejó entrar

y fue al cuarto portero y le prometió si le dejase entrar que le daría los cuatro quintos de las rosas que sacase y cuatro quintos de rosa más, sin partir. También fue contento y entró, y sacó tantas rosas que dio a cada uno lo que prometió y, en fin, a él le quedó una rosa. Demando que cuántas rosas sacó y cuántas dio a cada uno de los cuatro porteros.

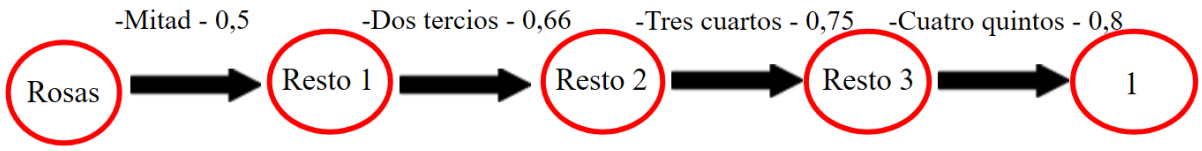
FASE 1 - COMPRENDER

Datos: hay un hombre, una huerta con rosas, 4 porteros a los que convence para que le dejen pasar, una cantidad de rosas que el hombre saca de la huerta, una rosa que le queda después de dar a los porteros lo prometido.

Objetivo: saber las rosas que sacó y cuántas dio a cada portero.

Relaciones: el hombre promete al primer portero, si le deja entrar, la mitad de las rosas que trajese y media más, sin partir. Promete al segundo portero los dos tercios de las rosas que trajese y dos tercios más, sin partir. Promete al tercero los tres cuartos de las rosas que sacase y tres cuartos de rosa más, sin partir. Promete al cuarto portero los cuatro quintos de las rosas que sacase y cuatro quintos de rosa más, sin partir.

ESQUEMA



FASE 2 - PENSAR

Podemos utilizar la estrategia de modelización, organizar la información, ensayo error y la de ir hacia atrás. Aunque todas pueden llevarnos a la solución, vamos a optar por la de "ir hacia atrás", ya que conocemos la información final de la historia y todos los cambios que se han ido sucediendo en cada uno de los pasos. En cada uno de los pasos "organizamos la información" para obtener el valor de cada resto.

FASE 3 - EJECUTAR

IR HACIA ATRÁS

Comenzamos por el final, y vamos retrocediendo hasta llegar al punto inicial. Invertimos las operaciones y el orden en el que las vamos ejecutando.

Si partimos del resto 3, entregamos 4/5 de las flores y 4/5 de una rosa para obtener una única rosa:

$\text{Resto3} - 4/5\ \text{Resto3} - 0{,}8 = 1 \qquad \text{Resto3} = 9$

Resto2 – 3/4 Resto2 – 0,75 = 9	Resto2 = 39
Resto1 – 2/3 Resto1 – 0,66 = 39	Resto1 = 119
Rosas – 1/2 Rosas – 0,5 = 119	Rosas = 239

FASE 4 - RESPONDER

COMPROBAR

Si el hombre tiene 239 y entrega la mitad y media más, da $\frac{1}{2}$ 239 +0,5 = 120. Le quedan 119.
Si tiene 119 y entrega $\frac{2}{3}$ 119 + 0,666, da 80 y le quedan 39.
Si tiene 39 y entrega $\frac{3}{4}$ 39 + 0,75 = 30, da 30 y le quedan 9.
Si tiene 9 y da $\frac{4}{5}$ 9 + 0,8 = 8, entrega 8 y le queda 1.

ANALIZAR

Respuesta única. No hay otra cantidad de rosas con la que comenzar y que llegue a un resto final de una rosa.

RESPONDER

El hombre sacó 239 rosas. Dio 120 rosas al primero, 80 al segundo, 30 al tercero y 8 al cuarto.

Adaptación para cursos intermedios de educación primaria

Parte de la complejidad del problema radica en las fracciones que tenemos que utilizar. Si lo queremos adaptar a cursos intermedios de primaria podemos hacer varias cosas:

-Reducir el número de porteros a 2 o a 3.

-Simplificar las fracciones que se entregan a cada portero, por ejemplo ½ o ¼

-Hacer que la cantidad extra de rosas que se entrega sea un número entero.

Si planteamos el problema como que al primer portero le da la mitad de las rosas que lleva y dos más, al segundo le dan la cuarta parte de las flores que le quedan y cuatro más, quedándose el hombre con una sola flor, la respuesta sería de 44.

Esta propuesta es incluso más asequible para hacerlo por modelización o por ensayo error. Además, por supuesto, de la estrategia de ir hacia atrás.

Otra manera de abordar el problema mediante ORGANIZAR LA INFORMACIÖN con Técnica ALGEBRAICA:

Llamamos **x** al número total de rosas que saca de la huerta. En las **celdas salmón** las cantidades que entrega a cada portero, en las **celdas azul** las cantidades que le quedan al horticultor después de

pasar por cada portería. En las celdas en blanco, las dos partes en que se divide las rosas sobrantes tras el "pago" al portero y antes de repartir al siguiente en la lista.

Portero	Reparto de las rosas			
	Entrega al portero		Conserva el hortelano	
1	$\frac{x}{2}$		$\frac{x}{2}$	
	$\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{x}{2}-\frac{1}{2}=\frac{x-1}{2}$	
2	$\frac{2}{3}\cdot\frac{x-1}{2}$		$\frac{1}{3}\cdot\frac{x-1}{2}$	
	$\frac{2}{3}\frac{x-1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{x+1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}\frac{x-1}{2}-\frac{2}{3}=\frac{x-5}{6}$	
3	$\frac{3}{4}\cdot\frac{x-5}{6}$		$\frac{1}{4}\cdot\frac{x-5}{6}$	
	$\frac{3}{4}\cdot\frac{x-5}{6}+\frac{3}{4}=\frac{x+1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{x-5}{6}-\frac{3}{4}=\frac{x-23}{24}$	
4	$\frac{4}{5}\cdot\frac{x-23}{24}$		$\frac{1}{5}\cdot\frac{x-23}{24}$	
	$\frac{4}{5}\cdot\frac{x-23}{24}+\frac{4}{5}=\frac{x+1}{30}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}\cdot\frac{x-23}{24}-\frac{4}{5}=\frac{x-119}{120}$	

Dicho de otra manera:

Al primer portero le entrega: quedan en manos del horticultor:

x/2 + 0.5 x/2 – 0.5

Al segundo portero le entrega:

2/3(x/2 – 0.5) + 0.666 1/3(x/2 – 0.5) – 0.666

Al tercero de los porteros le promete:

3/4(1/3(x/2 – 0.5) – 0.666) + 0.75 1/4(1/3(x/2 – 0.5) – 0.666) – 0.75

Y por último, al cuarto de los porteros le entrega:

4/5(1/4(1/3(x/2 – 0.5) – 0.666) – 0.75) + 0.8 1 rosa.

La suma de las rosas entregadas a los porteros más una, darán el total de las x rosas recogidas en la huerta

Vemos que el horticultor termina con

$$\frac{x-119}{120}$$

rosas, pero el enunciado nos dice que solo lleva una rosa, por tanto:

$\frac{x-119}{120} = 1$; x - 119 = 120; x = 120 + 119 , y finalmente **x = 239 rosas**.

Podemos comprobarlo sumando las cantidades repartidas a los porteros, que han de ser 238 rosas.

$$\boldsymbol{x-1=\frac{x+1}{2}+\frac{x+1}{3}+\frac{x+1}{8}+\frac{x+1}{30}=\frac{(60+40+15+4)x+(60+40+15+4)}{120}=\frac{119x+119}{120}}$$

$$\boldsymbol{120\,(x-1)=\ 119x+119;\ \ 120x-119x-120=119:\ x\ =120+119=239}$$

También podemos verlo de forma mucho más clara con este esquema:

239 rosas			
Entrega al		**Le quedan**	**La mitad es**
Portero1	120	119	60
Portero 2	80	39	40
Portero 3	30	9	15
Portero 4	8	1	4
Totales	238	1	

Nos queda por ver las aportaciones de Meavilla:

Respuesta.

Lo harás así. Porque a él no le quedó sino una rosa, junta 1/2 al uno, por la mitad que prometió al primero, y serán uno y medio, dóblalos y serán 3, a los cuales 3 junta los dos tercios que prometió al segundo y serán reducidos 11 tercios. Después, estos 11 redúcelos con los tres cuartos que prometió al tercero y serán 47. Después, estos 47 redúcelos con los 4 quintos que prometió al cuarto y serán 239, y tantas rosas dirás que tomó de la huerta para cumplir con todos cuatro y para que le quedase a él sólo una rosa (...) [fols. 170r – 170v].

COMENTARIO

Para resolver el problema, con naranjas en vez de rosas, Ortega empieza por el final (el hombre ya ha salido del huerto) y aplica reiteradamente el siguiente argumento (véase la tabla adjunta): si después de cruzar una puerta (en la que entrega al portero *a/b* de lo que tiene, más *a/b* de una naranja) el hombre tiene *n* naranjas, entonces antes cruzarla tenía $(nb + a)/(b - a)$ naranjas.

Número de naranjas antes de cruzar la puerta	Número de naranjas que entrega al portero	Número de naranjas después de cruzar la puerta
x	$\frac{ax}{b}+\frac{a}{b}$	$x-\left(\frac{ax}{b}+\frac{a}{b}\right)=$ $=\frac{(b-a)x-a}{b}=n\Rightarrow$ $\Rightarrow x=\frac{nb+a}{b-a}$

EXEMPLO XIV. *De multiplicar reſtando.*

Si ſe ofreciere aver de multiplicar algun numero por un multiplicador compueſto de nueves, ſe harà con gran brevedad, y facilidad de eſte modo.

He de multiplicar eſte numero 8632. por 999. añado à la cantidad, ò numero tres ceros, que es un cero por cada nueve, y deſpues reſto el miſmo numero que ſe ha de multiplicar (que aqui es 8632.) y lo que quedàre, ſerà el producto de la tal multiplicacion, como aqui parece.

8 6 3 2 0 0 0.
8 6 3 2.

Producto 8 6 2 3 3 6 8.

La razon es manifieſta, ſi bien ſe advierte; porque añadir tres ceros, es lo miſmo que multiplicar por 1000. y como à los 999. del multiplicador, no les falta mas que la unidad para llegar à 1000. por eſſo ſe reſta una vez el numero que ſe ha de multiplicar, y lo que queda es el verdadero producto: luego, ſi el multiplicador fuere 9998. con añadir quatro ceros, y reſtar el duplo del numero que ſe multiplica, la reſta ſerà el producto: y ſi el multiplicador fuere 997. ſe añadiràn tres ceros, y ſe quitarà, ò reſtarà el triplo, y lo que quedàre ſerà el producto. Todo lo qual ſe puede probar facilmente, multiplicando por el modo regular.

Épsilon, 2013, Vol. 30 (2), nº 84, 89-100, ISSN: 2340-714X

¿Se atreven a probar el método y su fundamento matemático? (Esto lo proponemos nosotros)

Resulta claro que las operaciones propuestas por el aragonés, escritas en lenguaje simbólico, son las siguientes:

8632 x 999 = 8632 x (1000 – 1) = 8632000 – 8632 = 8623368.

8632 x 9998 = 8632 x (10000 – 2) = 86320000 – 17264 = 86302736.

8632 x 997 = 8632 x (1000 – 3) = 8632000 – 25896=8606104.

Entorno Abierto nº 55 , abril de 2024

Cubre el sólido con algún material que se pueda volver a quitar sin disminuir su cantidad y dale una forma regular, por ejemplo, de cubo, de prisma, etc. Mide esta forma o figura regular. Quita el material que has aplicado al sólido y forma con él una figura también regular. Mídela y réstala de la primera. El residuo será lo requerido.

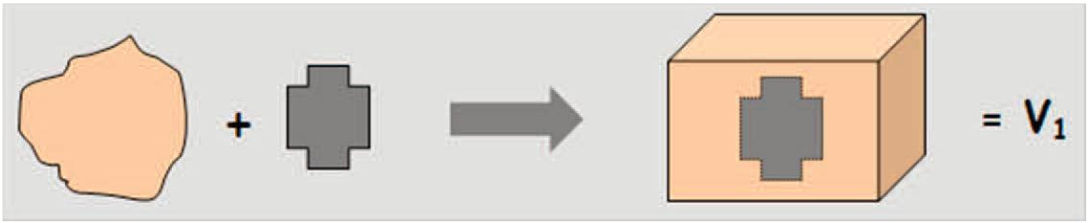
¿Son capaces de visualizar este método? (También es nuestra propuesta.) ¿Y de llevarlo a cabo usando plastilina?

El procedimiento anterior se puede visualizar así:

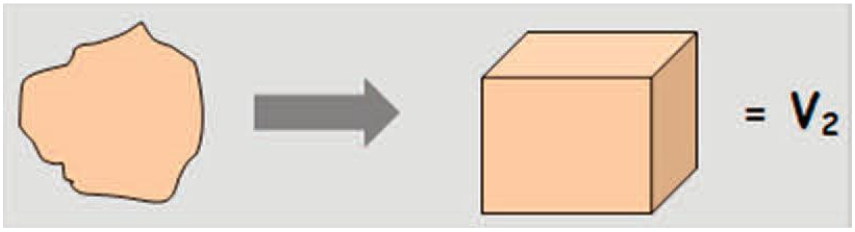
—El sólido se envuelve con plastilina y se construye un ortoedro. Se miden sus dimensiones y se calcula su volumen V_1.



Se quita toda la plastilina que envuelve el sólido y se construye otro ortoedro. Se miden sus dimensiones y se calcula su volumen V_2.



Con estos datos, el volumen del sólido es igual a $V_1 - V_2$.



Entorno Abierto nº 57 , octubre de 2024

Si Fabio, dos años menos
De los que tiene, tuviera;
Tendría trece y un tercio
Y un cuarto de los que cuenta.

Sería interesante resolverlo (otra propuesta más de los autores).

A nosotros nos da 36 años, ¿y a ustedes?

Vamos a atender ahora a los problemas con datos canarios del profesor Estévez Méndez:

LOS MUNICIPIOS (José Estévez Méndez)

La suma de los municipios de Tenerife, La Palma, La Gomera y El Hierro es 53. Tenerife tiene 17 más que La Palma, y la Gomera 8 menos que La Palma. La razón entre los cuadrados de los números que representan los de la Gomera y el Hierro es 9. **¿Cuántos Municipios existen en cada una de las islas de la provincia de Santa Cruz de Tenerife?**

Los ejercicios complementarios que proponemos para realizar por los alumnos, una vez resuelto este problema, son:

Actualiza los datos del problema y redacta el enunciado para que la solución sea el número de municipios de cada isla actualizado al año 2026.

Plantea un problema semejante, pero con datos de tu provincia o estado, buscando relaciones numéricas entre los datos reales y actuales que lleven a planteamientos parecidos y que se puedan resolver mediante un sistema de ecuaciones.

Idem con datos del pasado siglo y compara los resultados.

Para los alumnos puede ser un aliciente el ser ellos los que planteen los ejercicios, buscando datos reales y actuales y relacionándolos entre sí.

Los ejercicios complementarios que proponemos para realizar por los alumnos, una vez resuelto este problema, son:

-Actualiza los datos del problema y redacta el enunciado para que la solución sea el número de municipios de cada isla actualizado al año 2026.

-Plantea un problema semejante, pero con datos de tu provincia o estado, buscando relaciones numéricas entre los datos reales y actuales que lleven a planteamientos parecidos y que se puedan resolver mediante un sistema de ecuaciones.

FASE 1 - COMPRENDER

Datos: TF + LP + LG + EH = 53

Objetivo: Cuántos municipios en cada isla

Relaciones: TF = LP + 17 ; LG = LP – 8 ; $(LG)^2 / (EH)^2 = 9$

FASE 2 – PENSAR

Podemos utilizar las siguientes estrategias: modelización, ensayo error y organización de la información. Aunque todas pueden llevarnos a la solución, vamos a optar por organizar la información mediante una técnica algebraica.

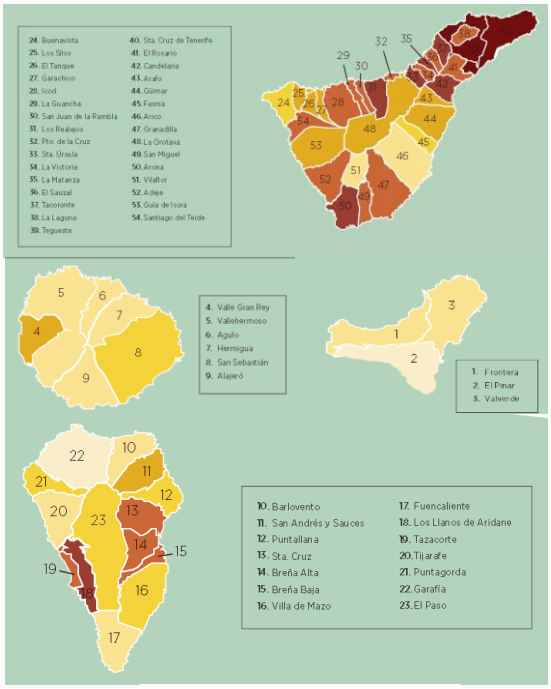
FASE 3 - EJECUTAR

Sea t el número de municipios de Tenerife, p el de municipios de La Palma y g y h los de La Gomera y El Hierro.

La primera relación nos permite escribir: $t + p + g + h = 53$

Las siguientes relaciones indican que:

$t = p + 17$; $g = p - 8$; y que $g^2/h^2 = 9$.



Imágenes cedidas por
Gobierno de Canarias
Consejería de Educación, Universidades y Sostenibilidad
Dirección General de Ordenación, Innovación y Promoción Educativa

Tenemos que resolver un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas.

$$\begin{cases} t + p + g + h = 53 \\ t = p + 17; \\ g = p - 8; \\ \dfrac{g^2}{h^2} = 9 \end{cases}$$

Sustituyendo en la primera los valores de t y g de la segunda y tercera ecuación, y g en la cuarta:

$$\begin{cases} p + 17 + p + p - 8 + h = 53 \\ \\ \dfrac{(p-8)^2}{h^2} = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p + 17 + p + p - 8 + h = 53 \\ \\ (p-8)^2 = 9\,h^2 \end{cases}$$

Operando y extrayendo raíces:

$$\begin{cases} 3p + h = 53 - 9 = 44 \\ p - 8 = 3h \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3p + h = 44 \\ p = 3h + 8 \end{cases}$$

3(3h + 8) + h = 44; 9h + 24 + h = 44: 120h = 44 – 24 = 20; h = 20/10 = 2.

h=2

Y como p = 3h + 8, p = 6 + 8 = 14

p=14

Al ser t = p + 17 = 14 + 17 = 31

t=31

y, por último g = p – 8 = 14 – 8 = 6

g=6

Resumiendo: Tenerife tenía (y tiene) 31 municipios, La Palma 14, La Gomera 6 y El Hierro 2.

Pero El Hierro, en el año 2007 obtuvo el municipio de El Pinar, así que ahora tiene 3 municipios, y la provincia tiene 54.

FASE 4 - RESPONDER

Tenerife tenía 31 municipios, La Palma 14, La Gomera 6 y El Hierro 2.

ALUMNAS DE MAGISTERIO.

En la Escuela Normal del Magisterio de La Laguna disponemos de los siguientes datos sobre los alumnos matriculados en el curso 1956-57:

Alumnos, enseñanza oficial: 97
Alumnos, idem libres: 235
Alumnas, idem oficial: 174

Alumnas enseñanza libre: número de tres cifras en el que la de las unidades es el menor múltiplo de ocho y la de las decenas el mayor divisor de 9. Si se invierte el número, la razón del primero al segundo es 149/446.

¿Cuántas alumnas cursaron algún curso de Magisterio por enseñanza libre?

FASE 1 - COMPRENDER

Datos: 97 alumnos oficiales

235 alumnos libres

174 alumnas oficial

Objetivo: ¿cuántas alumnas?


MAESTRAS TITULADAS EN LA LAGUNA, TIEMPO HA.

Relaciones: número alumnas libres es un número de tres cifras con las siguientes condiciones, la cifra de las unidades es el menor múltiplo de ocho y la de las decenas el mayor divisor de 9. Si se invierte el número, la razón del primero al segundo es 149/446

FASE 2 - PENSAR

Podemos utilizar las siguientes estrategias: modelización, ensayo error y organización de la información. Aunque todas pueden llevarnos a la solución, vamos a optar por organizar la información utilizando una técnica algebraica.

FASE 3 - EJECUTAR

Sea $\boldsymbol{O}$ el número de alumnos de enseñanza oficial: 97

Sea $\boldsymbol{L}$ los alumnos de enseñanza libre: 235

Llamamos $\boldsymbol{o}$ a las alumnas matriculadas en enseñanza oficial: 174

Y designamos por $\boldsymbol{l}$ a las alumnas de enseñanza libre, cuyo número pretendemos calcular.

Sea $\boldsymbol{abc}$ ese número $\boldsymbol{l}$. Es decir: $\boldsymbol{l = 100a + 10b + c.}$

Se nos dice que $\boldsymbol{c}$, valor de las unidades, es el menor múltiplo de 8, es decir $\boldsymbol{c} = 8$.

Y que $\boldsymbol{b}$, valor de las decenas, es el mayor divisor de 9, por tanto $\boldsymbol{b} = 9$.

Pero además se nos indica que la razón entre $\boldsymbol{abc}$ y su invertido $\boldsymbol{cba}$ es de 149/446.

Así pueS: $\frac{100a+90+8}{800+90+a} = \frac{149}{446}$ y operando

$$446(100a + 98) = 149(890 + a);\ 446000a * 4446\cdot 98 = 132610 + 149a;\ 44600a + 43708 = 132610 + 149a$$

$(44600 – 149)a = 132610 – 43708;\ 44451a = 88902$

Y por último: $a = \frac{88902}{44451} = 2$

SOLUCIÓN.

El número de alumnas de magisterio matriculadas libres en el curso 1956-57 fue de 298.

En total había 472 alumnas y 332 alumnos.

Cabe hacer alguna reflexión sobre los datos de hace 75 años y los actuales.

En el curso 2025-26 estos son los datos de matriculación de alumnos. No hay enseñanza libre.

	Hombres	Mujeres
Gracuado en Maestro de Educación Infantil	99	649
Gracuado en Maestro de Educación Primaria	382	682
	481	1331

Podemos comprobar que el número de alumnas sigue siendo superior al de alumnos. ¿Tradición?

FASE 4 - RESPONDER

El número de alumnas de magisterio matriculadas libres en el curso 1956-57 fue de 298.

Finalmente vemos las soluciones a los retos clásicos de la web EPSILONES, cuyo autor es Alberto Rodríguez Santos.

CURIOSIDADES DEL 8 Y EL 9

$$89 = 8\cdot 9 + (8 + 9)$$

Pues sí, 8 y 9 tienen este "remarcable comportamiento", en palabras de Thomas Koshy. La cuestión es ¿qué números cumplen esto mismo?

Precisando: **¿Qué números naturales admiten una descomposición de sus cifras en dos partes de modo que el producto más la suma de dichas partes sea el número original?**

FASE 1 - COMPRENDER

Datos: la igualdad $89 = 8\cdot 9 + (8 + 9)$

Objetivo: saber qué números naturales admiten una descomposición de sus cifras en dos partes de modo que el producto más la suma de dichas partes sea el número original.

Relaciones: la descomposición de un número de 2 cifras ab en suma y producto de dichas partes a + b y a·b, si se suman vuelve a dar al número ab.

Esquema: $(a + b) + (a\cdot b) = ab$

FASE 2 - PENSAR

Podemos utilizar la estrategia de organización de la información.

FASE 3 - EJECUTAR

ORGANIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN

Utilizamos la representación decimal del número

$ab = 10a + b$ y la propiedad que buscamos $ab = a\cdot b + (a + b)$

de donde $10^a + b = a\cdot b + a + b \rightarrow 10a + b - a - b = a\cdot b \rightarrow 9a = a\cdot b \rightarrow b = 9$

FASE 4 - RESPONDER

COMPROBAR.

Podemos probar para 19, 29, 39… $39 = 3\cdot 9 + (3 + 9) = 27 + 12$

$289 = 28\cdot 9 + (28 + 9) = 252 + 37$

ANALIZAR.

Hay infinitas soluciones.

RESPONDER.

Admiten esta descomposición todos los naturales que terminan en 9.

Sería posible conjeturar algo más, pensando en la posibilidad de que el número tenga más de dos cifras, como pasa con el ejemplo del 289.

En un número cualquiera podemos presentar sus cifras en dos bloques y representar esas dos partes **a** y **b** de la siguiente manera: $a \cdot 10^n + b$

Si se cumple el enunciado del problema, tenemos:

$a \cdot 10^n + b = a \cdot b + (a + b)$

$a \cdot 10^n + b = a \cdot b + a + b$

$a \cdot 10^n = a \cdot b + a$

$a \cdot 10^n = a \cdot (b + 1)$

$10^n = b + 1$

$B = 10^n - 1$

Es decir, que **b** es una secuencia de nueves, mientras que **a** puede ser cualquier cosa.

Visto al revés, ahora es obvio:

$a \cdot 10^n + b = a \cdot (10^n - 1 + 1) + b = a \cdot (10^n - 1) + a + b$

Ejemplos:

$89 = 8 \cdot 9 + (8 + 9)$

$35999 = 35 \cdot 999 + (35 + 999)$

Podríamos profundizar un poco más en el tema. Otra posibilidad es la siguiente:

Podríamos conjeturar que, dada la conmutatividad del producto y la suma, también todos los que comienzan con 9 cumplen la propiedad, pero invirtiendo sus cifras:

$93 = 9 \cdot 3 + 9 + 3 = 27 + 12 = 39$

¿Qué características deben tener esos números para que se cumpla la conjetura?

Porque contraejemplos los hay en cantidad:

$982 = 98 \cdot 2 + 98 + 2 = 736 + 100 = 836$

$982 = 9 \cdot 82 + 9 + 82 = 738 + 91 = 822$

¿Se atreven?

Los colchones de Gulliver

Cuando Gulliver cayó en el país de los Liliputienses, no tenía dónde dormir. Le consiguieron 600 colchones. Gulliver era 12 veces más alto que un habitante de Liliput, aunque su cuerpo era por completo semejante al de ellos.

Pregunta: **¿Qué tal durmió aquella noche?**

FASE 1 - COMPRENDER

Datos: 600 colchones

Objetivo: Qué tal durmió Gulliver

Relaciones: Gulliver era 12 veces más alto que cualquier liliputiense



FASE 2 - PENSAR

Podemos utilizar las siguientes estrategias: modelización, ensayo error y organización de la información. Aunque todas pueden llevarnos a la solución, vamos a optar por organizar la información en el diagrama de la estructura multiplicativa.

FASE 3 - EJECUTAR

Sería 12 veces más ancho y 12 veces más grueso, por lo que sería $12 \cdot 12 \cdot 12 = 1728$ veces más pesado.

Necesita una superficie de $12 \cdot 12 = 144$ veces más grande donde acostarse, que el tamaño de un colchón. Los colchones formarían un rectángulo de 12 largos por 12 anchos. Los 600 colchones podrían colocarse en $600/144 = 4.167$ capas, es decir: usaría $4 \cdot 144 = 576$ colchones para las cuatro capas, y sobran 24 para una almohada.

No debe estar muy cómodo durmiendo en un colchón que es tres veces más delgado de lo necesario.

FASE 4 - RESPONDER

Los pobres 600 liliputienses durmieron esa noche en el suelo y Gulliver durmió fatal: extrañaba su cama.

El baile de 42



Cuarenta y dos personas toman parte en un baile. Durante la velada una dama bailó con siete caballeros, una segunda dama con ocho, una tercera, con nueve y así sucesivamente hasta la última, que bailó con todos los caballeros. **¿Cuántas damas y caballeros había en aquel baile?**

FASE 1 - COMPRENDER

Datos: hay 42 personas, son hombres y mujeres.

Objetivo: saber cuántas damas y caballeros había en aquel baile.

Relaciones: una dama bailó con siete caballeros, una segunda dama con ocho, una tercera, con nueve y así sucesivamente hasta la última, que bailó con todos los caballeros

Esquema

Dama	1	2	3	4	5	6	…	n
Caballero	7	8	9	10	11	12		n+6

FASE 2 - PENSAR

Estrategias: organizar la información y buscar patrones

FASE 3 - EJECUTAR

Utilizamos la tabla de la fase 1.

Dama	1	2	3	4	5	6	…	n
Caballero	7	8	9	10	11	12		n+6

$n+(n+6) = 42$; $2n = 38$; $n = 18$;

18 damas y 24 caballeros

FASE 4 - RESPONDER

COMPROBAR.

Si seguimos la secuencia, la 16ª dama bailó con el 24º caballero. $16 + 24 = 42$

ANALIZAR.

La solución es única.

RESPONDER.

Había en el baile 18 damas y 24 caballeros.

También podemos pensarlo así: como tenemos a las damas numeradas, el ordinal de la última coincide, obviamente, con el número total de damas. Resulta que esta baila con todos los caballeros, y estos siempre son seis más que el ordinal de la dama, de lo que se deduce que hay seis chicos más que chicas:

42 - 6 = 36

36 / 2 = 18

Luego hay 18 damas y 24 caballeros.

VEINTE PANES PARA VEINTE PERSONAS

Veinte panes para veinte personas, los niños a medio pan, las mujeres a dos y los hombres a tres. **¿Cuántos hombres, niños y mujeres había?**

FASE 1 - COMPRENDER

Datos: hay 20 panes y 20 personas.

Objetivo: saber los hombres, niños y mujeres que había

Relaciones: los niños reciben medio pan, las mujeres dos y los hombres tres.

Esquema:

Personas	Hombres	Mujeres	Niños	Total 20
Panes	h x 3	m x 2	n x 0.5	Total 20

FASE 2 - PENSAR

Organizar la información

Modelizar

Ensayo error

FASE 3 - EJECUTAR

ORGANIZAR LA INFORMACIÓN

$h + m + n = 20$ $\quad h = 20 - m - n$

$3h + 2m + 0.5n = 20$ $\quad 3(20 - m - n) + 2m + 0.5n = 20$

$60 - 3m - 3n + 2m + 0.5n = 20$ $\quad 40 = m + 2{,}5n$

Todos son números enteros, y n tiene que ser par puesto que hay un número total de panes entero (20)

Para n = 2, n = 4, n = 6, n = 8, n = 10, n = 12 no se cumple. Pero para n = 14, m = 5 y h = 1

MODELIZACIÓN

Ver enlace 

ENSAYO ERROR

Hombres (3)	Mujeres (2)	Niños (0,5)	Total: personas y panes
6(18)	6(12)	8(4)	20 (34) Muchos panes. Sobran hombres o faltan niños.
4(12)	4(8)	12(6)	20 (26) Muchos panes. Sobran hombres o faltan niños.
2(6)	4(8)	14(7)	20 (21) Sobra 1 pan. La diferencia entre hombres y mujeres.
1(3)	5(10)	14(7)	20 (20) Correcto

FASE 4 - RESPONDER

COMPROBAR.

1 hombre + 5 mujeres + 14 niños son 20 personas. $1 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 14 \cdot 0{,}5 = 20$

ANALIZAR.

La solución es única.

RESPONDER.

Había 1 hombre, 5 mujeres y 14 niños.

Una forma sencilla de resolver el problema consiste en utilizar una técnica algebraica.

Sea **x** el número de hombres, **y** el número de mujeres y **z** el número de niños. Entonces se tiene:

$x + y + z = 20$

$3x + 2y + 1/2z = 20$

Multiplicando por dos la segunda ecuación y restándole la primera, tenemos:

$5x + 3y = 20$

Para $y = 0$ entonces $x = 4$, es decir, que el número de hombres posibles es 0,1,2,3,4.

Despejando y,

$y = 20 - 5x/3$

Una ecuación diofántica. Para para los valores de x (que han de ser enteros) tendríamos los siguientes números de y:

x	y	Resultado
0	20/3	No es un número natural
1	5	
2	10/3	No es un número natural
3	5/3	No es un número natural
4	0	

Como en el problema dice: "[...]los niños a medio pan, las mujeres a dos y los hombres a tres", podemos deducir que hay al menos 1 hombre y mujeres. Entonces tenemos:

hombres = 1

mujeres = 5

niños = 14

LA TIERRA Y LA CINTA

Supongamos que hemos rodeado la Tierra por su ecuador con una cinta. Si ahora quisiésemos levantar la cinta un metro a lo largo de todo el recorrido, **¿cuánta cinta deberíamos añadir para completar la circunferencia? ¿Y si hiciésemos lo mismo en Júpiter?**

FASE 1 - COMPRENDER

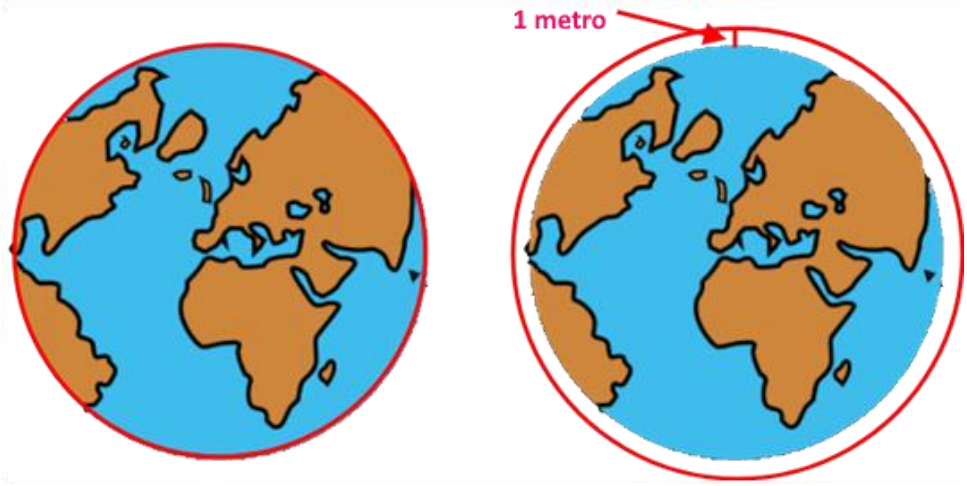


Datos: rodeamos la Tierra por su ecuador con una cinta de longitud L. Después rodeamos la Tierra con otra cinta más larga. Hacemos lo mismo en Júpiter.

Objetivo: saber la longitud que debe tener la nueva cinta.

Relaciones: la nueva cinta de longitud L1 se levanta 1 m a lo largo de todo el recorrido por el ecuador.

Esquemas



FASE 2 - PENSAR

Organización de la información.

FASE 3 - EJECUTAR

Radio terrestre 6 370 000 m. Longitud de la cinta $2 \pi r = 40\,023\,856{,}6$ m

Nueva longitud 6 370 001 = 40 023 862,8 m 6,2 m más larga que la anterior.

Radio Júpiter 70 000 000 m. Longitud circunferencia $2 \pi r = 439\,822\,600$ m.

Nueva longitud 70 000 001 m Longitud circunferencia $2 \pi r = 439\,822\,606{,}2$ m. 6,2 m más que la anterior.

FASE 4 - RESPONDER

COMPROBAR.

Al aplicar la fórmula de la longitud de la circunferencia comprobamos los resultados.

ANALIZAR.

La solución es única.

RESPONDER.

En la Tierra hay que añadir 6,2 m a la cinta. En Júpiter también.

Adaptación para cursos intermedios de educación primaria

Es posible adaptar esta idea al alumnado de los cursos intermedios de primaria de la siguiente manera:

Facilitamos al alumnado varios objetos de forma circular, como tapones de botella, piezas de bloques lógicos aros de educación física, tapas redondas de algún recipiente, etcétera. Podemos medir su circunferencia o rodearlos con una cinta y cortar la cinta de forma exacta.

Planteamos ahora que vamos a aumentar la longitud de la cuerda en 1 m para cada uno de los objetos, y queremos saber en qué caso la cuerda se alejará más del objeto.

El alumnado llegará a la conclusión de que sea el que sea el tamaño de la circunferencia inicial, al alargar 1 m la longitud de la cuerda, se separa 16 cm de la superficie de la circunferencia.

Distancia al horizonte

Estás en la playa mirando el horizonte. Pregunta: **¿a qué distancia se encuentra?**
(No vale la contestación "lejísimos")



El sentido común nos engaña siempre, incluso después de haberlo resuelto matemáticamente.

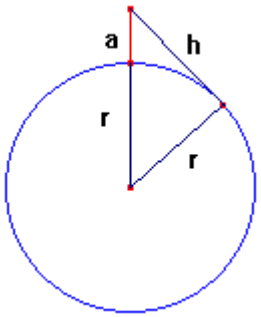
En la página de EPSILONES llegan a preguntar: Antes de comenzar a resolverlo te sugeriría que hicieses una estimación a ojo: ¿5 km?, ¿50?, ¿500?

Los datos necesarios son el radio de la Tierra, que en el ecuador es de, aproximadamente, 6378 km, y la altura a la que se encuentran los ojos del observador, que podemos situar, dado que estamos en la playa, a unos 2 metros del suelo (0'002 km).

El horizonte es la línea a partir de la cual no podemos ver más allá a causa de la curvatura de la Tierra. Por tanto, la visual que une nuestros ojos con el horizonte es una línea tangente a la Tierra, y por tanto perpendicular al radio de esta en el horizonte. Esto nos permite, como se puede ver en el esquema, aplicar el teorema de Pitágoras. El observador estaría representado (en nuestro caso playero de un modo evidentemente exagerado) por el segmento rojo.

La **a** representa la altura del observador, **r** el radio de la Tierra y **h** la distancia al horizonte, nuestra incógnita.

Por Pitágoras se tiene que:



$$(r+a)^2 = h^2 + r^2$$

$$h^2 = (r+a)^2 - r^2 = z^2 + 2ar$$

$$h = \sqrt{a^2 + 2ar}$$

Basta sustituir **a** y **r** por los valores arriba indicados para obtener la solución: h = 5 km.

Lo normal es nunca veamos el horizonte desde la orilla del mar. Siempre estamos más altos y eso lleva a valores mucho mayores. De ahí el engaño del sentido común.

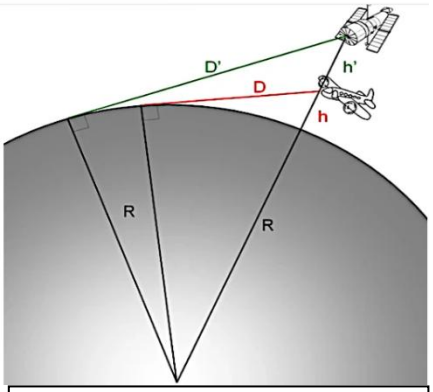
También pueden consultar la Wikipedia y otras fuentes para ver qué dice sobre este asunto.

Comprender la distancia aparente del horizonte

El horizonte es el límite aparente entre la Tierra y el cielo. Su distancia depende de la curvatura terrestre, la altura del observador y la refracción atmosférica. Esta distancia se puede calcular mediante una fórmula geométrica simple sin tener en cuenta la refracción atmosférica.

Cálculo de la distancia al horizonte con corrección atmosférica

En realidad, la refracción atmosférica aumenta ligeramente esta distancia porque los rayos de luz se curvan hacia el suelo. En condiciones estándar, este efecto se modela reemplazando R por $R/(1-k)$ donde $k \approx 0{,}13$.



Esquema que muestra la geometría entre un observador y la línea del horizonte, en una Tierra ideal perfectamente

Datos curiosos los de esta tabla comparativa de distancias al horizonte según la altitud del observador, a la que hemos añadido la visión desde el Teide, punto más alto de España.

Distancia al horizonte según la posición del observador				
Situación	**Altura del ojo (m)**	**Distancia geométrica (km)**	**Distancia con refracción (km)**	**Hipótesis**
	a	**$h = (a^2 + 2aR)^{1/2}$**	**$h = (a^2+2aR/0.87)^{1/2}$**	
Persona de pie	2	5,06	5,24	Atmósfera estándar, k=0,13
Persona en el 3er piso de un edificio	10	11,28	11,68	Altura aproximada de 3 pisos (3,3 m/piso)
Acantilado de 100 m	100	35,68	36,9	Mar en calma, visibilidad máxima
Montaña de 1000 m	1000	112,88	116,55	Cima despejada
Desde el Teide	**3720**	**218**	**234**	**Visibilidad máxima**
Avión a 10.000 m	10000	357,1	368,26	Vuelo en atmósfera estándar
Estación espacial ISS (~408 km)	408000	2270	2336	Vista por encima de la troposfera
Órbita geoestacionaria (~36.000 km)	36000000	19040	19300	Vista desde la órbita geoestacionaria, mitad de la Tierra visible

Tabla tomada de Wikipedia y ampliada

La imagen siguiente muestra un arco del círculo de 218 km con centro en el Teide, indicando los límites de visibilidad máxima sin refracción. Quedaría fuera Lanzarote, La Graciosa y parte de Fuerteventura.

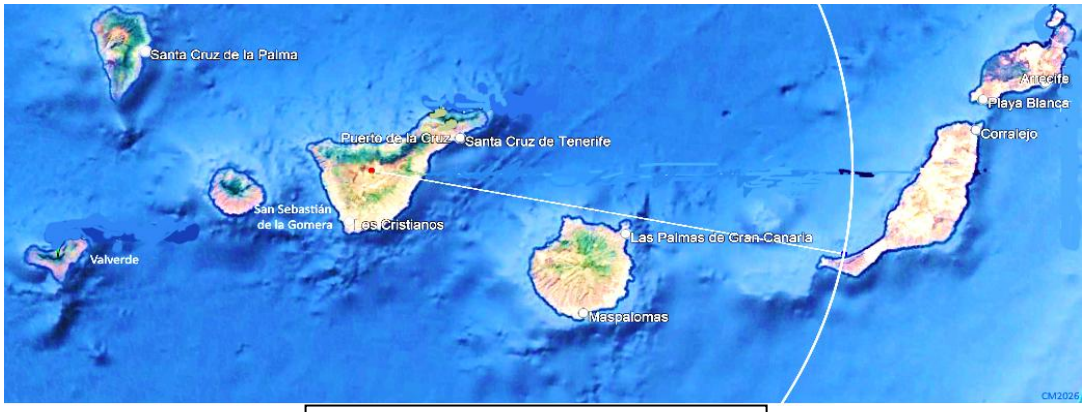


Imagen tomada de Google Earth.

Pero la realidad es que en singulares condiciones son visibles todas las islas (salvo La Graciosa) por dos razones: las cimas de las islas (Fuerteventura: Pico de la Zarza con 812 m, y Lanzarote: Peña del Chache con 670 m) y el efecto de refracción de la luz.

La mayor altura de La Graciosa: Pico Las Agujas, queda muy alejada y oculta en parte por Lanzarote.

Queda "como ejercicio" dibujar el círculo de 234 km de visibilidad considerando la refracción.

ALICIA EN EL BOSQUE DEL OLVIDO



Cuando Alicia entraba en el Bosque del Olvido, a menudo olvidaba su nombre y algunas veces hasta el día de la semana. No obstante, dos extraños animales, un león y un unicornio, asiduos del bosque, le daban alguna pista para averiguar el día en el que se encontraba.

El león mentía los lunes martes y miércoles y decía la verdad los otros días de la semana.

El unicornio mentía los jueves, viernes y sábados, pero decía la verdad los restantes días de la semana.

Un día Alicia entró en el bosque y se encontró con los dos animales que le dijeron:

León: Ayer fue uno de los días en los que me tocaba mentir.

Unicornio: Ayer fue también uno de los días en los que me tocaba mentir.

Alicia, que era muy inteligente, supo deducir a partir de estos comentarios qué día de la semana era.

¿Cuál era ese día?

FASE 1 - COMPRENDER

Datos: hay un personaje que se llama Alicia, un León y un unicornio.

Objetivo: saber qué día fue ayer.

Relaciones: El león miente los lunes, martes y miércoles y dice la verdad los otros días de la semana. El unicornio miente jueves, viernes y sábados, pero dice la verdad los restantes días de la semana.

El León dijo que ayer fue uno de los días en los que le tocaba mentir. El Unicornio dijo que ayer fue también uno de los días en los que le tocaba mentir.

Esquema

	lunes	martes	miércoles	jueves	viernes	sábado	domingo
León	**Miente**	**Miente**	**Miente**	**Verdad**	**Verdad**	**Verdad**	**Verdad**
Unicornio	**Verdad**	**Verdad**	**Verdad**	**Miente**	**Miente**	**Miente**	**Verdad**

FASE 2 - PENSAR

Posibles estrategias: organización de la información y ensayo error (probando los 7 días).

FASE 3 - EJECUTAR

ENSAYO ERROR

lunes	León: Ayer tocaba mentir. Unicornio: Ayer tocaba mentir.	León miente SÍ	Unicornio verdad NO
martes	León: Ayer tocaba mentir. Unicornio: Ayer tocaba mentir.	León miente SÍ	Unicornio verdad NO
miércoles	León: Ayer tocaba mentir. Unicornio: Ayer tocaba mentir.	León miente SÍ	Unicornio verdad NO
jueves	León: Ayer tocaba mentir. Unicornio: Ayer tocaba mentir.	León verdad SÍ	Unicornio miente SÍ
viernes	León: Ayer tocaba mentir. Unicornio: Ayer tocaba mentir.	León verdad NO	Unicornio miente NO
sábado	León: Ayer tocaba mentir. Unicornio: Ayer tocaba mentir.	León verdad NO	Unicornio miente NO
domingo	León: Ayer tocaba mentir. Unicornio: Ayer tocaba mentir.	León verdad NO	Unicornio verdad SÍ

Estamos a jueves para que las dos frases tengan sentido, luego ayer era miércoles.

ORGANIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN

Aprovechamos la tabla de la primera fase.

	lunes	martes	miércoles	jueves	viernes	sábado	domingo
León	**Miente**	**Miente**	**Miente**	**Verdad**	**Verdad**	**Verdad**	**Verdad**
Unicornio	**Verdad**	**Verdad**	**Verdad**	**Miente**	**Miente**	**Miente**	**Verdad**

Analizar la frase del León: "Ayer me tocaba mentir". Si el León dice esto hoy, solo hay dos opciones:

- Está diciendo la verdad hoy, significa que ayer (que mentía) fue miércoles, por lo que hoy es jueves.
- Está mintiendo hoy, significa que ayer NO mentía (decía la verdad). El único día que miente habiendo dicho la verdad el día anterior es el lunes (el domingo dijo la verdad). Días posibles: Lunes o Jueves.

Analizar la frase del Unicornio: "Ayer también me tocaba mentir". Aplicamos la misma lógica:

- Está diciendo la verdad hoy, significa que ayer (que mentía) fue sábado, por lo que hoy es domingo.

- Está mintiendo hoy, significa que ayer NO mentía. El único día que miente habiendo dicho la verdad el día anterior es el jueves (el miércoles dijo la verdad). Días posibles para el Unicornio: Jueves o Domingo.

El único día en el que ambas declaraciones coinciden y son posibles al mismo tiempo es el Jueves.

FASE 4 - RESPONDER

COMPROBAR

Si hoy es jueves, el León dice la verdad los jueves. Ayer fue miércoles (día que mentía). Su frase "Ayer me tocaba mentir" es verdadera.

El Unicornio miente los jueves. Ayer fue miércoles (día que decía la verdad). Su frase "Ayer me tocaba mentir" es una mentira.

ANALIZAR

Solo hay un día en el que se cumplen las condiciones, respuesta única.

RESPONDER

Ayer fue miércoles.

Se puede ir directamente a la solución. Dado que los dos personajes mienten en días distintos, está claro que uno dice la verdad mientras que el otro no. Por tanto, al que dice la verdad le tocaba mentir el día anterior, mientras que al que miente le tocaba decir la verdad el día anterior. De todo ello se deduce que el día pedido es aquel en el que se produce el cambio en la sinceridad de uno y otro: el jueves.

TRES CAJAS DE CARAMELOS

Tenemos tres cajas de caramelos: una tiene caramelos de naranja, otra de limón, y la tercera los contiene mezclados. Las cajas vienen etiquetadas como "Naranja", "Limón" y "Mezcla", pero se sabe que las tres etiquetas son incorrectas.

La pregunta es: ¿**cuántos caramelos será necesario probar para conocer el contenido de cada caja?**

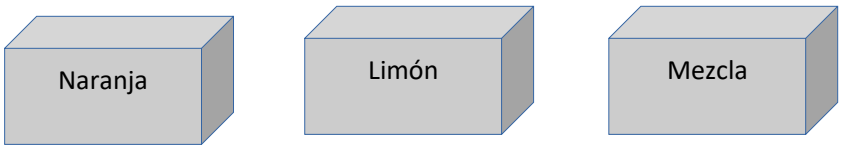
FASE 1 - COMPRENDER

Datos: hay 3 cajas de caramelos y caramelos de 2 sabores: naranja y limón. Hay 3 etiquetas: "Naranja", "Limón" y "Mezcla"

Objetivo: saber cuántos caramelos será necesario probar para conocer el contenido de cada caja.

Relaciones: una caja tiene solo caramelos de naranja, otra solo de limón, y la tercera los contiene mezclados. Todas las etiquetas de las cajas son incorrectas.

Esquema



FASE 2 - PENSAR

Podemos utilizar organización de la información.

FASE 3 - EJECUTAR

ORGANIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN

La clave del problema está en el dato inicial: todas las etiquetas están mal.

Elige la caja etiquetada como "Mezcla". Como sabemos que su etiqueta es incorrecta, en esa caja es imposible tener la mezcla.

Por lo tanto, solo tiene dos opciones: o es 100% Naranja o es 100% Limón.

Saca y prueba 1 caramelo de la caja "Mezcla".

Caso A: si el caramelo es de Naranja, significa que la caja "Mezcla" es en realidad la caja de Naranja.

Como la caja etiquetada como "Limón" no puede ser de limón (etiqueta falsa), tiene que ser la Mezcla. Por eliminación, la caja etiquetada como "Naranja" es la de Limón.

Caso B: si el caramelo es de Limón, significa que la caja "Mezcla" es en realidad la caja de Limón.

Como la caja etiquetada como "Naranja" no puede ser de naranja (etiqueta falsa), tiene que ser la Mezcla. Por eliminación, la caja etiquetada como "Limón" es la de Naranja.

FASE 4 - RESPONDER

COMPROBAR

Con la estrategia de modelización podemos ver que con un solo caramelo podemos adivinar el contenido de las 3 cajas .

ANALIZAR

Solamente hay una solución que responde a la pregunta del problema.

RESPONDER

Solo es necesario sacar un caramelo para saber el contenido de las cajas, pero tiene que ser un caramelo de la caja que dice "Mezcla".

Se podría trabajar con un árbol de decisiones o, también, utilizar una tabla.

Dado que las tres etiquetas son incorrectas, solo tenemos dos casos:

Etiquetas	**Naranja**	**Limón**	**Mezcla**
Caso 1	Limón	Mezcla	Naranja
Caso 2	Mezcla	Naranja	Limón

Si sacamos un caramelo de las cajas etiquetadas como "naranja" o "limón" no obtendremos ninguna información, pues cualquier sabor que detectemos podría corresponder tanto al caso 1 como al 2.

Sin embargo, si sacamos un caramelo de la caja etiquetada como "mezcla", sabremos inmediatamente si nos encontramos en el caso 1 o en el 2.

Vamos, que basta probar un caramelo.

No queremos acabar sin ofrecer algunos retos para nuestros lectores y lectoras. Son sencillos, apropiados para alumnado de Primaria.

1.- Con baldosas rectangulares de 4 cm x 10 cm se desea formar un cuadrado en el centro de un patio, sin que haya huecos ni superposiciones. **¿Cuál es la menor cantidad de baldosas que se necesita para formar el cuadrado?**

2.- Ana escribe un número de 2 cifras. Leo cambia de orden las cifras y escribe otro número 45 unidades mayor que el de Ana. **¿Qué número escribió Ana? Hay más de una solución a este reto? Encuéntralas todas.**

3.- Dibuja un rectángulo. Ahora utiliza tres líneas rectas que corten al rectángulo. **¿De qué manera podrían estar las rectas para que formaran el número mínimo y el número máximo de nuevos rectángulos?**

Y esto es todo. De momento. Y, bueno, ya saben, aunque seamos insistentemente pesados terminaremos con nuestro *mantra* particular:

Queremos pensar que nuestras propuestas tienen uso en el aula.

Eso nos alegraría mucho, y también al resto de lectores.

¡Qué vamos a hacer, nos repetimos!: vamos, anímense… ¡Si es divertido! Hagan lo que les pedimos: resuelvan los problemas y nos envían las soluciones (o las dudas y errores encontrados) para nosotros publicarlas aquí. No sólo es divertido, también es ¡muy interesante!

Hasta el próximo ejemplar de la revista. NÚMEROS Revista de Didáctica de las Matemáticas

Un saludo afectuoso del **Club Matemático.**